

## Вычислимость и логика 2016. Листок 2

Срок сдачи 18 мая

*В этом листке все сигнатуры и теории - с равенством, все модели нормальны.*

### Обязательные задачи

1. Докажите, что частично упорядоченные множества  $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$  и  $\mathbf{Z} + \mathbf{N}$  как модели сигнатуры  $\{<, =\}$  не элементарно эквивалентны.
2. Докажите, что в модели  $(\mathbf{N}, <)$  все конечные подмножества определимы.
3. Найдите все множества, определимые в модели  $(\mathbf{Q}, +, 0, =)$ .
4. Докажите, что не существует теории в сигнатуре  $(+, \cdot, 1, 0, =)$ , моделями которой являются в точности все поля ненулевой характеристики.
5. Докажите, что если теория в конечной сигнатуре имеет бесконечную (нормальную) модель, то она имеет и счетную (нормальную) модель.

### Дополнительные задачи

6. Докажите, что в  $(\mathbf{N}, \cdot, =)$  не определимы  $<$  и  $+$ .
7. В сигнатуре  $(R, =)$ , где  $R$  — 2-местный предикатный символ, рассмотрим теорию бесконечных множеств с отношением эквивалентности, у которого все классы 2-элементны.
  - а) Запишите аксиомы этой теории.
  - б) Докажите ее полноту.
  - в) Докажите, что эта теория не конечно аксиоматизируема.
8. Даны две теории  $T, S$  в сигнатуре  $L$  со следующими свойствами:
  - а) теория  $T \cup S$  противоречива;
  - б) всякая модель сигнатуры  $L$  является либо моделью  $T$ , либо моделью  $S$ .Докажите, что обе теории  $T$  и  $S$  конечно аксиоматизируемы.
9. Докажите, что не существует теории в сигнатуре  $(\cdot, =)$ , моделями которой являются в точности все циклические группы.
10. Докажите, что теория  $\text{Th}(\mathbf{Q}, +, \cdot, =, 1, 0)$  имеет по крайней мере 2 неизоморфных счетных модели.