

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2016
ЛИСТОК 6

срок сдачи 10.06.2016

1. Вычислите следующие сингулярные интегралы, определенные в смысле главного значения:

а) $\oint_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{z^3 - 1}$;

б) $\int_{-a}^a \frac{t^2}{\sqrt{a^2 - t^2}} \frac{dt}{t - x}$ ($a > 0$, $-a < x < a$);

2. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – аналитическая функция в верхней полуплоскости, ограниченная в ∞ , а $u(x) = u(x, 0)$, $v(x) = v(x, 0)$ – предельные значения ее действительной и мнимой частей на вещественной оси. Докажите формулы преобразования Гильберта:

$$v(x) = -\frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{t - x} dt + v(\infty), \quad u(x) = \frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(t)}{t - x} dt + u(\infty).$$

Пусть D – некоторая область. Гармонической мерой $\omega(z; \gamma, D)$ граничной дуги $\gamma \subset \partial D$ в точке z относительно области D называется ограниченная, гармоническая в D функция, равная 1 во внутренних точках дуги γ и 0 во внутренних точках остальной части границы.

3. Докажите, что $0 \leq \omega(z; \gamma, D) \leq 1$ при всех $z \in \bar{D}$. В каких случаях может достигаться равенство, если z лежит внутри области D ?
4. Найдите гармонические меры в следующих случаях:

- а) D – верхняя полуплоскость, γ – отрезок $[-1, 1]$;
б) D – круг $|z| < R$, γ – полуокружность $|z| = R$, $\text{Re } z > 0$;
в) D – кольцо $r < |z| < R$, γ – окружность $|z| = r$.

Пусть D – односвязная область. Функцией Грина G области D называется функция $G(z, \zeta) = \log |z - \zeta| + g(z, \zeta)$ на $D \times D$ такая, что:

- 1) $G(z, \zeta) = G(\zeta, z)$ и $G(z, \xi) = 0$ при любых $z \in D$ и $\xi \in \partial D$;
2) функция $g(z, \zeta)$ непрерывна в $D \times D$ и непрерывна по ξ в \bar{D} при всех $z \in D$;
3) функция $g(z, \zeta)$ гармонична по z при всех $\zeta \in D$ и гармонична по ζ при всех $z \in D$.

5. а) Найдите функцию Грина, если D – круг радиуса R с центром в точке $a \in \mathbb{C}$.
б) Найдите функцию Грина, если D – верхняя полуплоскость.

в) Докажите, что функция Грина единственна и дается формулой

$$G(z, \zeta) = \log \left| \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - \overline{w(z)}w(\zeta)} \right|,$$

где $w(z)$ – взаимно однозначное конформное отображение (односвязной) области D на единичный круг (существующее в силу теоремы Римана).

г) * Докажите, что функция Грина дает решение граничной задачи Дирихле в области D с помощью формулы

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D} u(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} G(z, \xi) |d\xi|,$$

где $\partial/\partial n_\xi$ – нормальная производная по второму аргументу (единичный нормальный вектор считается направленным во внешность области). Объясните, почему эта формула эквивалентна следующему выражению для гармонической меры инфинитезимальной дуги $|d\xi|$ границы области D : $\omega(z; |d\xi|, D) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_\xi} G(z, \xi) |d\xi|$.