Алгебра, листок 9: мультилинейная алгебра

1. Пусть V – конечномерное векторное пространство над полем K, и пусть $W \subset V$ – подпространство. Обозначим через $Ann(W)$ аннулятор W в V^*. Постройте канонические изоморфизмы $(V/W)^* = Ann(W)$ и $W^* = V^*/Ann(W)$.

2. **a)** Пусть W – векторное пространство над $\mathbb{C}$. Постройте канонический изоморфизм $(W^*)_{\mathbb{R}} = (W_{\mathbb{R}})^*$.
b) Пусть W – векторное пространство над $\mathbb{R}$. Постройте канонический изоморфизм $(W^*)^{\mathbb{C}} = (W^{\mathbb{C}})^*$.

3. Пусть b – билинейная форма на конечномерном векторном пространстве V над полем K. Определим левую корреляцию b_L и правую корреляцию b_R формы b как линейные операторы $V \to V^*$, переводящие произвольный вектор $v \in V$ в линейные функции $b(v, \bullet)$ и $b(\bullet, v)$, соответственно. (Жирная точка отмечает место, в которое вставляется аргумент линейной функции.) Докажите, что сопряженный оператор $b_L^* : V^{**} = V \to V^*$ к b_L совпадает с b_R.

4. Пусть V – n-мерное векторное пространство над конечным полем $\mathbb{F}_q$, где $q = p^k$ нечетно, и пусть b – невырожденная симметричная билинейная форма в V.
a) Докажите, что если $n > 1$, то существует вектор $v \in V$ такой, что $b(v, v) = 1$.
b) Закон инерции над конечным полем. Выберем элемент $\eta \in \mathbb{F}_q^*$, не являющийся квадратом. Докажите, что заменой базиса матрица формы b может быть приведена к диагональной, у которой на диагонали либо $1, 1, 1, \ldots, 1$, либо $\eta, 1, 1, \ldots, 1$.

5. Пусть b – билинейная форма на n-мерном векторном пространстве V над полем K. Подпространство $W \subset V$ называется изотропным, если ограничение b на W равно нулю.
a) Найдите в $\mathbb{C}^n$ для формы $b(x, y) = \sum_k x_k y_k$ изотропное подпространство максимальной возможной размерности.
b) Может ли максимальная размерность изотропного подпространства невырожденной билинейной формы быть больше, чем $n/2$?
c) Пусть b – кососимметрическая билинейная форма, а основное поле $K = \mathbb{R}$. Какова может быть максимальная размерность изотропного подпространства в зависимости от ранга формы b?
d) Пусть b – симметрическая билинейная форма, а основное поле $K = \mathbb{R}$. Какова может быть максимальная размерность изотропного подпространства в зависимости от индексов инерции формы b?

6. Для многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$ рассмотрим на $\mathbb{R}$-алгебре $R_f = \mathbb{R}[x]/(f)$ линейную функцию tr, которая на каждом $g \in R_f$ равна следу линейного оператора $R_f \to R_f$ домножения на g. Определим на R_f квадратичную форму $q_f(g, h) = tr(g \cdot h)$. Найдите ранг и сигнатуру формы q_f в случаях **a)** $f(x) = x^n$ и **b)** $f(x) = x^2+1$. **c)** Докажите, что для взаимно простых многочленов f и g сигнатура q_{fg} равна сумме сигнатур q_f и q_g (подсказка: $R_{fg} = R_f \oplus R_g$).
d) Докажите, что сигнатура формы q_f равна числу вещественных корней многочлена f.
e) Сколько вещественных корней у многочлена $x^4 - x^2 + 0.1x + 0.2$?

7. Докажите, что в эрмитовом пространстве нет нильпотентных нормальных операторов.

8.$^\times$ Докажите, что если в симметрической матрице некоторый главный минор порядка r отличен от нуля, а все окаймляющие его главные миноры порядка $r+1$ и $r+2$ равны нулю, то ранг этой матрицы равен r.

9.$^\times$ Сопоставим каждому графу Γ с вершинами $v_1, \ldots, v_n$ квадратичную форму $q_\Gamma(x) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j$, где $a_{i,j}$ равно 2 если $i = j$, равно -1 если v_i и v_j соединены ребром, и равно 0 иначе.
a) Докажите, что если форма q_Γ положительно определена, то граф Γ не содержит циклов, то есть все его компоненты связности – деревья.
b) Докажите, что если форма q_Γ неотрицательно определена, то каждая связная компонента графа Γ – либо дерево, либо замкнутая цепочка.
c)$^\times$ Опишите все связные графы, для которых форма q_Γ положительно определена; неотрицательно определена.