КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Лекция №9: Угловой момент в координатном представлении

А.Г. Семенов

I. ОПЕРАТОР МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

На предыдущей лекции при помощи алгебраического подхода был построен базис собственных состояний оператора углового момента. Напомним основные результаты. В трехмерном пространстве оператор момента импульса имеет три компоненты - $\hat{l}_x$, $\hat{l}_y$, $\hat{l}_z$, которые не коммутируют между собой

$$[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = i\hat{l}_z, \qquad [\hat{l}_y, \hat{l}_z] = i\hat{l}_x, \qquad [\hat{l}_z, \hat{l}_x] = i\hat{l}_y, \tag{1}$$

а значит группа вращений трехмерного пространства является неабелевой. Также, что у данной алгебры существует оператор Казимира (элемент коммутирующий со всеми элементами алгебры), который равен

$$\hat{l}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2, \tag{2}$$

и является оператором квадрата момента импульса. Если система инвариантна относительно вращений, то её Гамильтониан коммутирует со всеми тремя данными операторами и с оператором Казимира. Это означает, что существует общий набор собственных состояний у Гамильтониана, одной из проекций момента импульса и оператора Казимира. Как было отмечено на предыдущей лекции, каждое подпространство Гильбертова пространства, отвечающее определенному собственному значению Гамильтониана реализует представление соответствующей группы симметрии системы. Все возможные собственные состояния классифицируются двумя числами: $l \geq 0$, которое может принимать целые или полуцелые значения и m, которое меняется от $-l$ до l с шагом единица. При этом $\hat{l}^2|l,m\rangle = l(l+1)|l,m\rangle$, $\hat{l}_z|l,m\rangle = m|l,m\rangle$, а операторы $\hat{l}_\pm = \hat{l}_x \pm i\hat{l}_y$ связывают состояния с ближайшими m

$$\hat{l}_+|l,m\rangle = \sqrt{(l-m)(l+m+1)}|l,m+1\rangle, \tag{3}$$

$$\hat{l}_-|l,m\rangle = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}|l,m-1\rangle. \tag{4}$$

При таком определении построенные состояния ортонормированы $\langle l,m|l',m'\rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$.

II. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ

В качестве примера использования полученных результатов давайте рассмотрим частицу в центральном поле. В этом случае в координатном представлении Гамильтониан будет иметь вид

$$\hat{H} = -\frac{\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2}{2m} + V(\sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2}). \tag{5}$$

В данной задаче можно разделить переменный при помощи перехода к сферическим координатам

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\theta)\sin(\varphi), \qquad z = r\cos(\theta). \tag{6}$$

При этом алгебра оператором момента импульса реализуется через дифференциальные операторы, действующие не угловые переменные. Они будут иметь следующий вид

$$\hat{l}_x = i\left(\sin(\varphi)\partial_\theta + \cot(\theta)\cos(\varphi)\partial_\varphi\right) \tag{7}$$

$$\hat{l}_y = i\left(-\cos(\varphi)\partial_\theta + \cot(\theta)\sin(\varphi)\partial_\varphi\right) \tag{8}$$

$$\hat{l}_z = -i\partial_\varphi \tag{9}$$

$$\hat{l}^2 = -\partial_\theta^2 - \cot(\theta)\partial_\theta - \frac{1}{\sin^2(\theta)}\partial_\varphi^2 \tag{10}$$

$$\hat{l}_+ = e^{i\varphi}\left(\partial_\theta + i\cot(\theta)\partial_\varphi\right) \tag{11}$$

$$\hat{l}_- = e^{-i\varphi}\left(-\partial_\theta + i\cot(\theta)\partial_\varphi\right) \tag{12}$$

И при этом Гамильтониан в сферических координатах примет вид

$$\hat{H} = -\frac{\partial_r^2}{2m} - \frac{\partial_r}{mr} + \frac{\hat{l}^2}{2mr^2} + V(r). \tag{13}$$

Давайте найдем собственные функции операторов $\hat{l}^2$ и $\hat{l}_z$ в данном представлении. Обозначим их как $Y_{lm}(\theta,\varphi)$. Мы уже показали тот факт, что они удовлетворяют уравнениям

$$\hat{l}^2 Y_{lm}(\theta,\varphi) = l(l+1)Y_{lm}(\theta,\varphi), \qquad \hat{l}_z Y_{lm}(\theta,\varphi) = mY_{lm}(\theta,\varphi). \tag{14}$$

Второе уравнение легко решается, причем из 2π периодичности по φ следует что m и l могут принимать только целые значения. Таким образом

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}\Theta_{lm}(\theta) \tag{15}$$

а функция $\Theta_{lm}(\theta)$ удовлетворят уравнению

$$\partial_\theta^2\Theta_{lm}(\theta) + \cot(\theta)\partial_\theta\Theta_{lm}(\theta) + (l(l+1)\sin^2(\theta) - m^2)\Theta_{lm}(\theta) = 0 \tag{16}$$

Однако, вместо решения данного уравнения заметим, что мы можем построить все состояния действуя оператором $\hat{l}_-$ на $Y_{ll}(\theta,\varphi)$. При этом $\hat{l}_+Y_{ll}(\theta,\varphi)$, что эквивалентно уравнению

$$\partial_\theta\Theta_{ll}(\theta) = l\cot(\theta)\Theta_{ll}(\theta), \tag{17}$$

которое имеет решение

$$\Theta_{ll}(\theta) = \frac{1}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{2}}\sin^l(\theta). \tag{18}$$

Все остальные состояния получаются действием $\hat{l}_-$:

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!(2l)!}}\hat{l}_-^{l-m}Y_{ll}(\theta,\varphi). \tag{19}$$

Условие нормировки в координатном представлении выглядит как

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \sin(\theta) Y_{lm}(\theta,\varphi) Y_{l'm'}(\theta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{20}$$

Выпишем еще несколько представлений для сферических гармоник.

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-1)^m\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}}P_{lm}(\cos(\theta)) \tag{21}$$

где

$$P_{lm}(x) = (-1)^{l-m}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{1}{2^l l!(1-x^2)^{m/2}}\frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}}(1-x^2)^l \tag{22}$$

III. НЕБОЛЬШОЕ ДОПОЛНЕНИЕ О ВЫЧИСЛЕНИИ НОРМИРОВОЧНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ

При вычислении нормировочных множителей полезно использовать следующее представление для бета-функции

$$B(\mu,\nu) = \int\limits_0^1 dx x^{\mu-1}(1-x)^{\nu-1} = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}. \tag{23}$$