КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Лекция №12: Движение частицы в электромагнитных полях.

Статическое магнитное поле

А.Г. Семенов

I. ЛАГРАНЖИАН И ГАМИЛЬТОНИАН ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ.

До сих пор мы рассматривали квантово-механическое движение частицы лишь в потенциальном поле, однако в природе существуют силы, которые не являются таковыми. Одним из примеров такой силы является сила Лоренца, действующая на частицу, движущуюся в магнитном поле. В данной лекции мы рассмотрим вопрос о том, как описывать движение заряженной частицы в электромагнитном поле. Строго говоря, квантово-механическое описание является более общим и поэтому не может быть полностью выведено из соответствующего классического описания системы, однако принцип соответствия может нам дать некоторые указания к этому. Конечный ответ может быть дан лишь в результате детального сравнения с экспериментом. В качестве стартовой точки рассмотрим лагранжиан нерелятивистской частицы, движущейся в электромагнитном поле

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - e\phi(x,t) + e\dot{x}_i A_i(x,t), \tag{1}$$

где $\phi(x,t)$ и $A_i(x,t)$ это скалярный и векторный потенциалы, описывающие внешнее электромагнитное поле. Напряженности электрического и магнитного полей выражаются через них как

$$\mathcal{E}_i(x,t) = -\partial_i\phi(x,t) - \dot{A}_i(x,t), \tag{2}$$

$$\mathcal{B}_i(x,t) = \epsilon_{ijk}\partial_j A_k(x,t). \tag{3}$$

Используя Лагранжиан можно найти канонический импульс

$$p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_i} = m\dot{x}_i + eA_i, \tag{4}$$

и соответствующий Гамильтониан

$$H = \frac{(p_i - eA_i(x,t))^2}{2m} + e\phi(x,t). \tag{5}$$

При попытке квантования мы встречаемся с проблемой, поскольку Гамильтониан содержит вклады, представляющие собой произведение импульса и координаты. Как оказывается, наивное квантование дает правильные результаты

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p}_i - eA_i(\hat{x},t))^2}{2m} + e\phi(\hat{x},t). \tag{6}$$

Данный Гамильтониан полностью описывает движение частицы в электромагнитном поле. Давайте найдем оператор скорости, который связан с производной оператора координаты в представлении Гейзенберга

$$\hat{v}_i = i[\hat{H}, \hat{x}_i] = \frac{\hat{p}_i - eA_i(\hat{x},t)}{m}, \tag{7}$$

что позволяет записать Гамильтониан системы в виде, полностью аналогичном случаю частицы в потенциальном поле

$$\hat{H} = \frac{m\hat{v}_i^2}{2} + e\phi(\hat{x},t). \tag{8}$$

Однако, при наличии магнитного поля компоненты оператора скорости уже не коммутируют между собой

$$[\hat{v}_i, \hat{v}_j] = \frac{ie}{m^2}\epsilon_{ijk}\mathcal{B}_k \tag{9}$$

Именно этот факт приводит к интересной структуре уровней частицы в магнитном поле. Однако, прежде чем обсуждать данное явление давайте рассмотрим вопрос о калибровочной инвариантности в квантовой механике.

II. КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ.

Несмотря на то, что Лагранжиан (и Гамильтониан) содержат скалярный и векторный потенциалы, в уравнение движения частицы входят лишь напряженности электрического и магнитного полей. При этом существует некоторая свобода в определении потенциалов поля. При калибровочном преобразовании

$$A_i(x,t) \to A_i(x,t) + \partial_i\varphi(x,t) \qquad \phi(x,t) \to \phi(x,t) - \dot{\varphi}(x,t) \tag{10}$$

напряженности электрического и магнитного полей не изменяются, а к Лагранжиану добавляется полная производная

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + e\frac{d\varphi(x(t),t)}{dt}, \tag{11}$$

что, как известно, не влияет на уравнения движения. Данное свойство хотелось бы сохранить и в квантовой теории. Рассмотрим уравнение Шредингера в координатном представлении для частицы в электромагнитном поле с Гамильтонианом указанном выше

$$i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m}(\partial_i - ieA_i(x,t))^2\psi(x,t) + e\phi(x,t)\psi(x,t) \tag{12}$$

и совершим калибровочное преобразование с потенциалами поля, что приведет у уравнению

$$i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m}(\partial_i - ieA_i(x,t) - ie\partial_i\varphi(x,t))^2\psi(x,t) + e\phi(x,t)\psi(x,t) - e\dot{\varphi}(x,t)\psi(x,t). \tag{13}$$

Данное уравнение будет эквивалентно исходному уравнению Шредингера при условии, что при калибровочном преобразовании преобразуется и волновая функция путем умножения на фазовый множитель

$$\psi(x,t) \to \psi(x,t)e^{ie\varphi(x,t)}. \tag{14}$$

Таким образом, в квантовой механике при калибровочном преобразовании преобразуются и вектора состояния системы. Это означает, что полученное на предыдущих лекциях выражения для плотности потока вероятности обнаружить частицу уже не может быть корректным в данном случае. Правильное выражение имеет вид

$$J_i(x,t) = \frac{i}{2m}\left(\psi^*(x,t)(\partial_i\psi(x,t)) - (\partial_i\psi^*(x,t))\psi(x,t)\right) + \frac{e}{m}A(x,t)|\psi(x,t)|^2, \tag{15}$$

и, как несложно проверить, оно калибровочно инвариантно. В заключение выпишем выражение для потенциалов электромагнитного поля, отвечающих постоянному магнитному полю, направленному вдоль оси z. Вот несколько примеров

$$A_i^{(1)} = (-\mathcal{B}y, 0, 0), \tag{16}$$

$$A_i^{(2)} = (0, \mathcal{B}x, 0), \tag{17}$$

$$A_i^{(3)} = (-\frac{1}{2}\mathcal{B}y, \frac{1}{2}\mathcal{B}x, 0). \tag{18}$$

Теперь мы можем рассмотреть задачу о собственных состояниях Гамильтониана частицы в постоянном магнитном поле.

III. ЧАСТИЦА В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Давайте решим задачу о движении частицы в постоянном магнитном поле. Соответствующее уравнение на собственные состояния имеет вид

$$((\hat{p}_x + e\mathcal{B}\hat{y})^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2)\psi(x,y,z) = 2mE\psi(x,y,z) \tag{19}$$

Заметим, что существует две сохраняющиеся величины, коммутирующие с Гамильтонианом, а именно $\hat{p}_x$ и $\hat{p}_z$, что позволяет произвести разделение переменных. Ищем волновую функцию в виде

$$\psi(x,y,z) = e^{ip_z z + ip_x x}\chi(y) \tag{20}$$

При этом на $\chi(y)$ получается уравнение, аналогичное уравнению на собственные состояния Гармонического осциллятора

$$(\hat{p}_y^2 + m^2\omega_c^2(\hat{y} - y_0)^2)\chi(y) = (2mE - p_z^2)\chi(y), \tag{21}$$

где мы ввели циклотронную частоту $\omega_c = \frac{|e|\mathcal{B}}{m}$ и положение центра орбиты $y_0 = -\frac{p_x}{2\mathcal{B}}$. Таким образом состояние частицы в магнитном поле определяется тремя квантовыми числами p_x,p_z,n

$$\psi(x,y,z) = e^{ip_z z + ip_x x}\psi_n^{(ho)}(y - y_0) \tag{22}$$

и оно отвечает энергии

$$E_{n,p_x,p_z} = \omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m}. \tag{23}$$

Тот факт, что энергия не зависит от p_x означает, что данные состояния вырождены, причем вырождение бесконечно-кратное.

IV. НЕЗАТУХАЮЩИЙ ТОК И ЭФФЕКТ ААРОНОВА-БОМА

Тот факт, что в Гамильтониан, а значит и в уравнение Шредингера входят потенциалы электромагнитного поля, а не его напряженности наводит на мысль, что, возможно, существует ситуация при которой частица чувствует именно потенциал, а не соответствующие поля. Рассмотрим простейший пример такой системы.Частица массы m может двигать по одномерной окружности радиуса R и её положение задается углом θ, который изменяется от 0 до 2π. В центр кольца помещен соленоид с магнитным полем внутри. При этом вне соленоида магнитное поле отсутствует. Однако, это не означает, что вне соленоида отсутствует векторный потенциал. Из определения и теоремы Стокса следует, что интеграл по контуру от векторного потенциала равен магнитному потоку, пронизывающему данный контур

$$\oint A_i dx_i = \Phi \tag{24}$$

В силу симметрии в данной ситуации это означает, что на частицу действует векторный потенциал равный $A_\theta = \frac{\Phi}{2\pi R}$, а значит Лагранжиан системы имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{e\Phi\dot{\theta}}{2\pi} \tag{25}$$

Последний вклад в Лагранжиан является полной производной и поэтому не дает вклада в классические уравнения движения, как и ожидалось. Давайте посмотрим, что произойдет в квантовом случае. Для этого найдем канонически сопряженный импульс

$$p_\theta = mR^2\dot{\theta} + \frac{\Phi}{\Phi_0}. \tag{26}$$

Здесь мы ввели обозначение для кванта потока $\Phi_0 = \frac{2\pi}{e}$. Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2mR^2}\left(p_\theta - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2, \tag{27}$$

после чего автоматические получается оператор Гамильтона соответствующей квантовой системы

$$\hat{H} = \frac{1}{2mR^2}\left(\hat{p}_\theta - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2. \tag{28}$$

В координатном представлении уравнение на собственные состояния будет иметь вид

$$\left(-i\partial_\theta - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 \psi(\theta) = 2mR^2 E\psi(\theta), \tag{29}$$

однако следует еще учесть тот факт, что угловая переменная меняется от от 0 до 2π, причем физически данные точки эквивалентны. Это означает, что $\psi(0) = \psi(2\pi)$. Собственные состояния легко находятся

$$\psi_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\theta}, \qquad E_n = \frac{\left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2}{2mR^2}, \tag{30}$$

где n - любое целое число. Отметим любопытный факт, что энергии всех состояний зависят от магнитного потока, пронизывающего кольцо, даже несмотря на то, что никакого магнитного поля напрямую на частицу не действует. При этом калибровочная инвариантность не нарушена, поскольку физический ответ зависит лишь калибровочно инвариантной величины - магнитного потока. Еще одним любопытным фактом является то, что зависимость от магнитного потока периодическая с периодом равным кванту потока. Ни наконец вычислим ток частицы, текущий по кольцу. Оператор тока равен

$$\hat{j} = iR[\hat{H}, \hat{\theta}] = \frac{\hat{p}_\theta - \frac{\Phi}{\Phi_0}}{mR}. \tag{31}$$

Его среднее по основному состоянию системы отлично от нуля и равно

$$\langle \hat{j} \rangle = \frac{n_{min} - \frac{\Phi}{\Phi_0}}{mR}, \tag{32}$$

где n_{min} - целое число минимизирующее E_n. Зависимость тока от потока также является периодической фунцией. Таким образом, за счет квантовой интерференции по кольцу с магнитным потоком внутри течет ток, который являясь свойством основного состояния системы не затухает. Это явление носит название Незатухающей ток (presistent current) и наблюдалось экспериментально. Влияние векторного потенциала на квантовое движение частицы носит название эффекта Ааронова-Бома.

V. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СПИНА ЧАСТИЦЫ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ.

Понятие спина не может быть выведено в рамках нерелятивистской квантовой механики, однако может быть введено феноменологически. При этом с точки зрения алгебры спин полностью аналогичен моменту импульса, но при этом вовсе не связан с каким либо орбитальным движением. Поэтому он может принимать как целые, так и полуцелые значения. В частности для описания частицы со спином 1/2 следует рассмотреть двумерное представление SU(2). В этом случае волновая функция частицы является двухкомпонентной и представляет собой спинор, а Гамильтониан помимо координатной части содержит операторы действующие на спиновую часть, которые представляют собой матрицы два на два. Операторы проекции спина могут быть выражены, например, через матрицы Паули $\hat{s}_i = \frac{1}{2}\hat{\sigma}_i$, где

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

Из релятивисткого рассмотрения движения частицы в электромагнитном поле следует тот факт, что при наличии магнитного поля к Гамильтониану необходимо добавить взаимодействие спина с магнитным полем

$$\hat{H}_m = -g_s \mathcal{B}_i \hat{s}_i \tag{34}$$

где g_s - называется гиромагнитным отношением. Для электрона $g_s \approx \frac{e}{m}$.