

А. К. Погребков

Интегрируемые системы

Высшая школа экономики
2-й семестр 2015/2016 гг.

Содержание

1	Лекция	3
1.1	О лошадях	3
1.1.1	Первое наблюдение “волны переноса”	3
1.1.2	Уравнение Кортевега–де Фриза – баланс дисперсии и нелинейности	3
1.1.3	Развитие теории нелинейных уравнений	5
1.2	Многомерные уравнения.	6
2	Лекция. Коммутаторные тождества и интегрируемые уравнения	7
2.1	Коммутаторные тождества	7
2.2	Операторы A и B	8
3	Лекция.	10
3.1	Обратная задача (процедура одевания)	10
3.2	Оператор K^{-1}	12
4	Лекция.	13
4.1	Свойства символа оператора B	13
5	Лекция.	15
5.1	Прямая задача	15
6	Лекция.	17
6.1	Сопряженная задача	17
6.2	Асимптотическое разложение оператора одевания	18
6.3	Уравнения эволюций оператора K	19
6.4	Свойства оператора Γ	19
7	Лекция	21
7.1	Уравнение КПП и формулировка в терминах решений Йоста	21
7.2	Законы сохранения	22
8	Лекция. Преобразование Бэклунда и дискретные системы	24
9	Лекция. Дальнейшая дискретизация КПП	26
10	Лекция	28
10.1	Редукция к КдФ	28
10.2	Общая схема метода обратной задачи. Уравнение Кортевега–де Фриза	30
10.3	Решения Йоста	31
11	Лекция	34
11.1	Асимптотическое поведение решений Йоста по k	34
11.2	Матрица монодромии	34
11.3	Свойства элементов матрицы монодромии.	36

12 Лекция	38
12.1 Интерпретация в терминах данных рассеяния	38
12.2 Целое решение уравнения Штурма–Лиувилля	39
12.3 Дискретный спектр	40
13 Лекция.	42
13.1 Простота нулей $a(k)$	42
13.2 Дисперсионное соотношение.	42
13.3 “Явные” формулы для κ_n и b_n	44
13.4 Спектральные данные.	45
14 Лекция.	46
14.1 Обратная задача: задача Римана–Гильберта	46
14.2 Временная эволюция.	48
15 Лекция.	50
15.1 Вывод уравнения Штурма–Лиувилля из уравнений обратной за- дачи.	50
15.2 Интегралы движения.	51
16 Лекция.	54
16.1 Скобки Гарднера и Магри	54
16.2 Солитонные решения: $r \equiv 0$	55
16.3 Односолитонное решение, $N = 1$	56
16.4 Двусолитонное решение, $N = 2$	57
16.5 Асимптотика по t N -солитонных решений (для желающих разо- браться самостоятельно)	59
17 Вопросы к зачету	62

1 Лекция

1.1 О лошадях

1.1.1 Первое наблюдение “волны переноса”

Первое наблюдение уединенной волны в 1834г. сделал шотландский ученый и инженер Дж. Скотт Рассел (1808–1882). Окончив Университет Глазго в 16 лет, он работал в Отделении естественной истории в Эдинбурге, где изучал пропускную способность канала Юнион. Вот в процессе этих исследований он доложил о следующем:

“Я наблюдал за движением баржи, которую быстро тащила вдоль узкого канала пара лошадей, когда внезапно баржа остановилась – вся масса воды в канале пришла в движение; вода собралась у носа корабля в состоянии бурного волнения, затем вдруг оторвалась от него и покатила вперед с большой скоростью, приняв вид большого уединенного возвышения; округлый, гладкий, четко выраженный холм воды продолжал свое движение по каналу без видимого изменения формы или уменьшения скорости. Я бросился за этой волной верхом на лошади и догнал ее, когда она все еще двигалась со скоростью около восьми или девяти миль в час, сохраняя первоначальную форму, и имела около тридцати футов в длину и от фута до полутора футов в высоту. Ее высота постепенно уменьшалась, и после одной или двух миль погони я потерял ее в изгибах канала. Так в августе месяце 1834г. произошла моя первая встреча с этим необыкновенным и прекрасным явлением, которое я назвал Волной Переноса (The Wave of Translation) ...”

В 1872г. Буссинеску предложил уравнение, описывающее длинные волны на поверхности жидкости и показал, что оно имеет решение типа уединенной волны. Однако реальный прорыв произошел в 1895г.: Кортвег и де Фриз получили уравнение распространения волн в одном направлении по поверхности мелкого канала (для невязкой, несжимаемой, однородной жидкости в постоянном поле тяжести)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1.1)$$

Они показали, что это уравнение обладает уединенной волной, т.е. решением вида

$$u(x, t) = \frac{-2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t - x_0)} \quad (1.2)$$

(отклонение уровня воды от стационарного для дальнейшего удобства обозначено $-u$), где параметр κ – произвольная положительная константа, не фиксированная уравнением. Именно эту волну и наблюдал Рассел.

1.1.2 Уравнение Кортвега–де Фриза – баланс дисперсии и нелинейности

Рассмотрим волновой процесс в предположении

1. отсутствия диссипации,

2. отсутствия дисперсии,
3. малости амплитуды колебаний φ_-

Тогда волновой процесс описывается волновым уравнением:

$$\partial_t^2 \varphi_- = c^2 \partial_x^2 \varphi_- . \quad (1.3)$$

Диссипативные системы – такие системы у которых механическая энергия (сумма кинетической и потенциальной) убывает, переходя в другие формы, например в теплоту (dissipatio – рассеивание, исчезновение (лат.)).

Дисперсия (dispersio – рассеяние (лат.)) – зависимость фазовой скорости гармонической волны от ее частоты. Гармоническая (плоская) волна:

$$e^{i\omega t - ikx} , \quad (1.4)$$

где ω – частота, k – волновой вектор,

$$\omega(k) = kv(k) \quad (1.5)$$

$v(k)$ – фазовая скорость. Групповая скорость = $\frac{\partial \omega}{\partial k}$. Дисперсионное соотношение – уравнение, связывающее частоту колебаний ω и волновой вектор k : $\omega = \omega(k)$.

Диссипация приводит к затуханию волны, дисперсия – к расползанию и перемешиванию пакетов, а нелинейные эффекты – к укрупнению фронтов. Эффект нелинейности хорошо демонстрирует бездисперсное уравнение КдФ:

$$u_t = buu_x, \quad (1.6)$$

которое решается следующим образом (см. задачу 1). Найдем s из уравнения

$$s = x + 6tu_0(s),$$

где $u_0(x)$ – начальное данное. Тогда решение задачи Коши для (1.6) дается посредством

$$u(t, x) = u_0(s(t, x)). \quad (1.7)$$

Рассмотрим как можно учесть малую нелинейность и дисперсию. Выделим из общего решения волнового уравнения $\psi = \psi_1(x - ct) + \psi_2(x + ct)$ волну, распространяющуюся, скажем, направо:

$$\partial_t \varphi_- + c\partial_x \varphi_- = 0. \quad (1.8)$$

Учтем нелинейную поправку к фазовой скорости: $v(k) = v_0 + v_1 k^2 + v_2 k^4 + \dots$, так что закон дисперсии принимает вид $\omega = ck - \beta k^3$ (член порядка k^2 отсутствует, поскольку гармоническая волна должна удовлетворять дифференциальному уравнению с вещественными коэффициентами). Такой закон дисперсии дается уравнением:

$$\partial_t \varphi_- + c\partial_x \varphi_- + \beta \partial_x^3 \varphi_- = 0 \quad (1.9)$$

Теперь введем нелинейность. Уравнения (1.8) и (1.9) имеют вид законов сохранения: $\partial_t \psi + \partial_x j = 0$, т.е. $\int dx \psi(x, t)$ сохраняется во времени. Добавим первую квадратичную поправку к j , что сохранит это свойство: $j = c\psi + \beta \partial_x^2 \psi + \frac{\alpha}{2} \psi^2$. Тогда $\partial_t \psi + c\partial_x \psi + \beta \partial_x^3 \psi + \alpha \psi \partial_x \psi = 0$, что после замены $x \rightarrow x + ct$, $\psi = -\frac{\beta}{\alpha} u$ дает уравнение КдФ.

1.1.3 Развитие теории нелинейных уравнений

В 1954г. Ферми, Паста и Улам, изучая на ЭВМ поведение цепочки нелинейных осцилляторов (что можно рассматривать как численное моделирование КдФ), обнаружили аномально медленную стохастизацию этой этой динамической системы.

В 1958г. Сагдеев показал, что в плазме могут распространяться солитоны, а Гарднер и Морикава в 1960 г. показали, что уравнения, описывающие сильную плазму аналогичны КдФ.

В 1965г. Забуски и Крускал, экспериментируя с численными решениями КдФ показали, что солитоны сталкиваются упруго и ввели само понятие “солитон”. Затем были открыты бесконечные серии законов сохранения.

Мы будем называть солитонами любые (экспоненциально) локализованные нелинейные волны, которые взаимодействуют с произвольными локальными возмущениями и всегда восстанавливают асимптотически свою форму.

В 1967г. Гарднер, Грин, Крускал и Миура предложили метод спектрального преобразования как метод решения задачи Коши

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (1.10)$$

для уравнения КдФ, где $u_0(x)$ – заданное начальное данное. Современный вариант этого метода называется методом обратной задачи рассеяния.

В 1968г. Лакс (Peter David Lax) обобщил метод обратной задачи рассеяния и вскрыл алгебраический механизм, лежащий в основе работы Гарднера, Грина, Крускала и Миуры. Уравнение КдФ эквивалентно **представлению Лакса**

$$\mathcal{L}_t = [\mathcal{L}, \mathcal{A}] \quad (1.11)$$

для пары дифференциальных операторов \mathcal{L} и \mathcal{A} (говорят также, что операторы \mathcal{L} и \mathcal{A} образуют **лаксову пару**):

$$\mathcal{L} = -\partial_x^2 + u, \quad (1.12)$$

$$\mathcal{A} = 4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x, \quad (1.13)$$

см. Задачу 2. Как мы увидим в дальнейшем, именно соотношение (1.11) лежит в основе применимости метода обратной задачи к нелинейным эволюционным уравнениям. Само существование и конкретный вид этих операторов, конечно, зависят от рассматриваемого нелинейного уравнения.

В 1971г. Гарднер, Захаров и Фаддеев построили теорию уравнения КдФ как гамильтоновой системы. В классической механике имеется теорема Лиувилля, согласно которой система, в которой число интегралов движения в инволюции совпадает с числом степеней свободы n , может быть полностью проинтегрирована (решена) методом разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби. Такая система является интегрируемой системой. Траектория такой системы в $2n$ -мерном фазовом пространстве может быть представлена в подходящих переменных (переменных действие-угол) как намотка на n -мерном торе. Система, число интегралов в которой меньше числа степеней свободы, проявляет

хаотическое поведение, то есть траектории в фазовом пространстве с близкими начальными условиями могут экспоненциально расходиться. При небольшой деформации интегрируемой системы в неинтегрируемую n -мерный тор в $2n$ -мерном фазовом пространстве разрушается (“размывается”), превращаясь, например в странный аттрактор.

В 1971г. Захаров и Шабат решили методом обратной задачи нелинейное уравнение Шредингера! В 1973г. метод был применен сразу к нескольким уравнениям в работе Абловица, Каупа, Ньюэлла и Сигура. После этих работ стало понятно, что уравнение КдФ – не единственное интегрируемое уравнение!!!

В 1975г. Захаров и Шабат предложили процедуру одевания.

Помимо уравнения КдФ в XIX веке были известны: уравнение sine-Гордон и уравнения Цицейки. Для уравнения sine-Гордон, возникающего при описании поверхностей постоянной отрицательной кривизны, был открыт способ построения и “размножения” солитонных решений – преобразование Беклунда.

В создание и развитие теории солитонов огромный вклад внесли школы Фаддеева и Новикова.

1.2 Многомерные уравнения.

Рассмотрим уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП)

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x = 3\sigma^2 u_{yy} \quad (1.14)$$

на вещественную функцию $u(t, x, y)$. Здесь $\sigma^2 = \pm 1$. В случае $\sigma^2 = 1$ это уравнение называется КП, а при $\sigma^2 = -1$ – КПИ. Уравнение КП – один из основных примеров в области интегрируемых уравнений в пространстве $2 + 1$ измерений. В физических задачах оно возникает в самых разных контекстах и для обоих знаков σ^2 . При этом свойства решений этих уравнений сильно зависят от выбора знака. Оператор Лакса имеет вид

$$\mathcal{L} = i\sigma\partial_y + \partial_x^2 - u(x, y), \quad \sigma = 1, i \quad (1.15)$$

Здесь мы будем рассматривать уравнение КПИ, т.е.

$$(u_t - 6uu_x + u_{xxx})_x = -3u_{yy}. \quad (1.16)$$

Его пара Лакса есть

$$\mathcal{L} = -\partial_y + \partial_x^2 - u(x, y), \quad (1.17)$$

$$\mathcal{A} = 4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x - 3 \int_{\infty}^x dx' u_y(x', y), \quad (1.18)$$

так что (1.16) эквивалентно (1.11).

Задача 1 Показать, что задача Коши

$$\begin{aligned} u_t &= 6uu_x \\ u(0, x) &= u_0(x) \end{aligned}$$

для бездисперсного уравнения КдФ (1.6) решается посредством равенства (1.7).

Задача 2 Доказать, что (1.11), где \mathcal{L} и \mathcal{A} даны в (1.12) и (1.13), эквивалентно (1.1).

2 Лекция. Коммутаторные тождества и интегрируемые уравнения

2.1 Коммутаторные тождества

Для любых двух элементов A и B произвольной ассоциативной алгебры выполнено следующее коммутаторное тождество:

$$[A^3, [A, B]] - \frac{3}{4}[A^2, [A^2, B]] - \frac{1}{4}[A, [A, [A, [A, B]]]] = 0. \quad (2.1)$$

Для доказательства этого тождества достаточно раскрыть все скобки, пользуясь свойством ассоциативности. Заметим теперь, что коммутаторы степеней оператора A коммутируют между собою. Поэтому мы можем задать зависимость B от произвольного набора времен t_1, t_2, \dots формулами

$$B_{t_1} = [A, B], \quad B_{t_2} = [A^2, B], \quad B_{t_3} = [A^3, B], \dots, \quad (2.2)$$

что в силу (2.1) означает, что функция $B(t_1, t_2, t_3)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 B(t)}{\partial t_1 \partial t_3} - \frac{3}{4} \frac{\partial^2 B(t)}{\partial t_2^2} - \frac{1}{4} \frac{\partial^4 B(t)}{\partial t_1^4} = 0, \quad (2.3)$$

т.е. линеаризованному уравнению КПП.

Тождество (2.1), как было сказано, можно доказывать непосредственной проверкой. Однако проще провести доказательство для случая, когда оператор A есть оператор умножения в некотором пространстве: $(Af)(x) = xf(x)$, а оператор B – интегральный оператор $(Bf)(x) = \int dy B(x, y)f(y)$ с произвольным ядром $B(x, y)$. Тогда для ядра коммутатора имеем $[A, B](x, y) = (x - y)B(x, y)$, и аналогично, для всех старших степеней $[A^n, B](x, y) = (x^n - y^n)B(x, y)$. Вообще, для произвольной функции от оператора A имеем $[F(A), B](x, y) = (F(x) - F(y))B(x, y)$. Обозначая $\alpha = x - y$, $\beta = x^2 - y^2$, имеем: $x = \frac{\beta + \alpha^2}{2\alpha}$ и $y = \frac{\beta - \alpha^2}{2\alpha}$.

Так что $F(x) - F(y) = F\left(\frac{\beta + \alpha^2}{2\alpha}\right) - F\left(\frac{\beta - \alpha^2}{2\alpha}\right)$, что, собственно, и дает тождество. В частности, полагая $F(A) = A^n$, получаем

$$x^n - y^n = \frac{1}{2^n(x - y)^{n-2}} \sum_{m=1}^n \frac{n!(1 - (-1)^m)}{m!(n - m)!} (x - y)^{2(m-1)} (x^2 - y^2)^{n-m},$$

так что мы пришли к полубесконечному набору коммутаторных тождеств

$$\begin{aligned} & [A^n, \underbrace{[A, \dots, [A, B] \dots]}_{n-2}] = \\ & = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \frac{n!}{(2m+1)!(n-2m-1)!} \underbrace{[A^2, \dots, [A^2]}_{n-2m-1} \underbrace{[A, \dots, [A, B] \dots]}_{4m}, \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

которое также можно проверить непосредственно. Здесь $[(n-1)/2]$ означает целую часть числа. В силу (2.2) мы видим, что по переменным t_1, t_2 и t_n выполняются уравнения:

$$\frac{\partial^{n-1} B(t)}{\partial t_1^{n-2} \partial t_n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} \frac{n!}{(2m+1)!(n-2m-1)!} \frac{\partial^{n+2m-1} B(t)}{\partial t_1^{4m} \partial t_2^{n-2m-1}}, \quad (2.5)$$

которые называются высшими линеаризованными уравнениями КПШ иерархии. В этом проявляется одно из специфических свойств интегрируемых уравнений: они всегда являются элементами бесконечных иерархий интегрируемых уравнений, упорядоченных по степеням старших производных. При этом следует иметь в виду, что включение, скажем, четырех времен (например, t_1, t_2, t_3 и t_4) не означает, что мы имеем интегрируемое уравнение функции четырех переменных. На самом деле, функция $B(t)$ в этом случае удовлетворяет двум уравнениям из (2.5), каждое из которых является уравнением по трем независимым переменным: при $n = 3$ это t_1, t_2 и t_3 , а при $n = 4$ – это t_1, t_2 и t_4 .

Введя зависимость оператора B от “времен” (независимых переменных) по (2.2) мы прошли к линейным дифференциальным уравнениям, которым он удовлетворяет в силу коммутаторных тождеств. Теперь наша задача – построить соответствующие нелинейные уравнения. Однако предварительно мы рассмотрим операторную реализацию элементов A и B ассоциативной алгебры.

2.2 Операторы A и B

В силу первого равенства в (2.2) оператор B зависит от t_1 , поэтому естественно считать, что он действует в пространстве функций вещественной переменной t_1 , например $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}, dt_1)$. Пусть D_1 означает оператор дифференцирования в этом пространстве: $(D_1 f)(t_1) = f_{t_1}(t_1)$. Тогда по (2.2)

$$A = D_1 + z, \quad (2.6)$$

где z – некоторый оператор, коммутирующий с произвольным оператором B . Избегая излишней общности, будем считать, что z – параметр, $z \in \mathbb{C}$. Поскольку нам задан лишь коммутатор, оператор B может быть произвольной функцией оператора A . По аналогии с псевдодифференциальными операторами, положим, что мы рассматриваем операторы, заданные посредством

$$B(t_1, A)f(t_1) = \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ipt_1} \tilde{B}(t_1, ip + z) \int dt'_1 e^{-ipt'_1} f(t'_1), \quad (2.7)$$

где $\tilde{B}(t_1, z)$ – функция трех вещественных аргументов: t_1, z_{Re} и z_{Im} . Мы будем называть эту функцию символом оператора B , причем мы не предполагаем ее аналитической зависимости от переменной z . Вообще говоря, мы будем считать, что рассматриваются операторы с символами, принадлежащими $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. Заметим, что

$$\tilde{B}(t_1, z) = B(t_1, A)1. \quad (2.8)$$

В то же время, если символ оператора задан, то сам оператор восстанавливается формальной подстановкой

$$B(t_1, A) =: \tilde{B}(t_1, z + D_1):, \quad (2.9)$$

если она имеет смысл и где $::$ означает “нормальное” упорядочение, т.е. все операторы D_1 стоят справа. В силу (2.6) и (2.7) легко видеть, что

$$\tilde{A}(t_1, z) = z. \quad (2.10)$$

Пусть теперь имеются два оператора B и B' с символами, соответственно, $\widetilde{B}(t_1, z)$ и $\widetilde{B}'(t_1, z)$. Тогда для символа их композиции получаем

$$\begin{aligned}\widetilde{BB}'(t_1, z) &= B(t_1, A)\widetilde{B}'(t_1, z) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ipt_1} \widetilde{B}(t_1, z + ip) \int dt'_1 e^{-ipt'_1} \widetilde{B}'(t'_1, z),\end{aligned}\quad (2.11)$$

где первое равенство следует из (2.8), а второе из (2.7). В частности отсюда для символа коммутатора $[A^n, B]$ следует:

$$\widetilde{[A^n, B]}(t_1, z) = ((\partial_{t_1} + z)^n - z^n) \widetilde{B}(t_1, z). \quad (2.12)$$

Пусть теперь оператор B зависит от t_2, t_3, \dots, t_n , где n – некоторое конечное число, в соответствии с (2.2), Мы будем обозначать такой оператор как $B(t, A)$. В силу (2.7) это означает, что от этих же времен зависит и символ этого оператора, $\widetilde{B}(t, z)$, так, что выполнены уравнения

$$\widetilde{B}_{t_2}(t, z) = \widetilde{B}_{t_1 t_1}(t, z) + 2z \widetilde{B}_{t_1}(t, z), \quad (2.13)$$

$$\widetilde{B}_{t_3}(t, z) = \widetilde{B}_{t_1 t_1 t_1}(t, z) + 3z \widetilde{B}_{t_1 t_1}(t, z) + 3z^2 \widetilde{B}_{t_1}(t, z). \quad (2.14)$$

...

$$\widetilde{B}_{t_n}(t, z) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n! z^{n-m}}{m!(n-m)!} \widetilde{B}_{t_1}^{(m)}(t_1, z), \quad (2.15)$$

где последнее равенство следует из (2.12) (не путать ∂_{t_1} и $D_1!$).

Задача 3 Доказать непосредственным вычислением, что равенство (2.1) является тождеством.

Задача 4 Найти общее решение системы (2.13), (2.14).

3 Лекция.

3.1 Обратная задача (процедура одевания)

Тот факт, что символ оператора $B(t_1, A)$ зависит от комплексного параметра z , позволяет строить новые операторы посредством различных операций по этому параметру. Например, вводить операторы, символы которых являются производными по z или \bar{z} . Отметим, прежде всего, что если оператор $B(t_1, A)$ является дифференциальным, т.е.

$$B(t_1, A) = \sum_{n=0}^N b_n(t_1) A^n, \quad (3.1)$$

где N – некоторое конечное натуральное число, то его символ есть

$$\tilde{B}(t_1, z) = \sum_{n=0}^N b_n(t_1) z^n. \quad (3.2)$$

Таким образом, в данном случае символ оператора – полином, т.е. целая функция z , так что $\frac{\partial \tilde{B}(t, z)}{\partial \bar{z}} = 0$, что также является определяющим условием для множества дифференциальных операторов (мы рассматриваем операторы, символы которых принадлежат \mathcal{S}' по z).

Для произвольного оператора $K(t_1, A)$ с символом $\tilde{K}(t_1, z)$ введем оператор $\bar{\partial}K(t_1, A)$, задав его ядро как

$$\widetilde{\bar{\partial}K}(t_1, z) = \frac{\partial \tilde{K}(t_1, z)}{\partial \bar{z}}. \quad (3.3)$$

В силу сделанных предположений этот оператор существует, его действие на вектора пространства дается по (2.7) как

$$\bar{\partial}K(t_1, A)f(t_1) = \frac{1}{2\pi} \int dp \frac{\partial \tilde{K}(t_1, z + ip)}{\partial \bar{z}} \int dt'_1 e^{-ip(t_1 - t'_1)} f(t'_1), \quad (3.4)$$

и по (2.11) выполнено правило Лейбница для дифференцирования произведения двух операторов:

$$\bar{\partial}(KK') = (\bar{\partial}K)K' + K\bar{\partial}K'. \quad (3.5)$$

Как уже отмечалось, для дифференциальных операторов эта процедура дает ноль, в частности по (2.10)

$$\bar{\partial}A = 0. \quad (3.6)$$

Пусть задан оператор $B(t, A)$, зависящий от времен t_1, \dots, t_n по (2.2), см. (2.13)–(2.15). Введем оператор $K(t, A)$ как решение $\bar{\partial}$ -задачи

$$\bar{\partial}K(t, A) = K(t, A)B(t, A), \quad (3.7)$$

нормированное условием, что его символ на z -бесконечности имеет предел

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \tilde{K}(t, z) = 1. \quad (3.8)$$

Мы будем считать, что данная задача однозначно разрешима. При этом условии, которое требует существенных ограничений на символ оператора B , которые мы тут не рассматриваем, эта задача позволяет вывести уравнения, описывающие эволюцию оператора K . При этом для зависимости от t_1 мы имеем непосредственно по определению операторов A и B :

$$K_{t_1} + KA = AK, \quad (3.9)$$

как, впрочем и для любого оператора рассматриваемого типа. Однако уже для эволюции по t_2 ситуация более сложная. Так, в силу (2.2) и (3.7):

$$\bar{\partial}(K_{t_2} + KA^2) = (K_{t_2} + KA^2)B, \quad (3.10)$$

где мы воспользовались (3.6). Таким образом, сумма $K_{t_1} + KA^2$ удовлетворяет тому же уравнению (3.7), что и K , но нормировка его отличается от (3.8). Причем, если символ первого слагаемого убывает с ростом z , то символ второго квадратично растет, причем с единичным, в силу (3.7), коэффициентом при z^2 . Это означает, что для любого оператора X такого, что $\bar{\partial}X = 0$ (дифференциальный оператор), в силу (3.7) разность $K_{t_1} + KA^2 - XK$ также удовлетворяет (3.7). Если нам удастся подобрать оператор X так, чтобы символ этого выражения стремился к нулю на z -бесконечности, то благодаря предположению об однозначной разрешимости (3.7) и само это выражение равно нулю. Итак, следует правильно подобрать оператор X , а для этого нужно уточнить асимптотическое поведение (3.8) символа оператора K . Положим, что символ оператора K обладает асимптотикой

$$\tilde{K}(t, z) = 1 + \frac{v(t)}{z} + \frac{w(t)}{z^2} + O(z^{-3}), \quad z \rightarrow \infty \quad (3.11)$$

где $v(t)$ и $w(t)$ -некоторые функции t , не зависящие от z и являющиеся, тем самым, по (2.7) символами операторов умножения, которые мы будем обозначать так же $v(t)$ и $w(t)$. Равенство (3.11) мы будем формально писать в виде

$$K(t, A) = 1 + v(t)A^{-1} + w(t)A^{-2} + \dots \quad (3.12)$$

Как уже было отмечено, по (3.8) символ оператора K_{t_2} убывает. Поэтому нам нужно приравнять неубывающие члены асимптотик символов операторов KA^2 и XK , где символ оператора X - полином второго порядка: $X(t, A) = A^2 + y_1(t)A + y_2(t)$. По (3.12) $KA^2 = A^2 + vA + w + \dots$, где многоточие означает убывающие члены. Для того, чтобы найти асимптотику XK , заметим что $A^2vA^{-1} = vA + 2v_{t_1} + \dots$, так что

$$XK = A^2 + (y_1 + v)A + y_2 + y_1v + w + 2v_{t_1}, \quad (3.13)$$

и приравнивая члены при неотрицательных степенях A , получаем: $y_1 = 0$, $y_2 = -2v_{t_1}$. Итак, мы нашли оператор X такой, что $K_{t_1} + KA^2 = XK$, выразив коэффициенты этого полинома через коэффициенты асимптотики символа оператора K . Обозначая

$$u(t) = 2v_{t_1}(t), \quad (3.14)$$

полученный результат имеет вид

$$K_{t_2} + KA^2 = A^2K - uK. \quad (3.15)$$

Введем операторы

$$L = -\partial_{t_2} + A^2 - u(t), \quad L_0 = -\partial_{t_2} + A^2, \quad (3.16)$$

где первый, как мы увидим ниже, приводит к (1.17), а второй – тот же оператор, но при нулевом потенциале. Тогда (3.15) можно записать как

$$LK = KL_0. \quad (3.17)$$

Это и объясняет название “процедура одевания” для всего этого подхода, а оператор K часто называют оператором одевания. Ниже мы рассмотрим эволюцию этого оператора по отношению к старшим временам t_n .

3.2 Оператор K^{-1}

Предположим, что оператор K допускает обращение, т.е. пусть существует оператор K^{-1} , такой, что $KK^{-1} = 1$. Тогда, в силу (3.5) и (3.7) $KBK^{-1} + K\bar{\partial}K^{-1} = 0$, т.е.

$$\bar{\partial}K^{-1} = -BK^{-1}, \quad (3.18)$$

а в силу (3.8) имеем нормировку

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \widetilde{K^{-1}}(t, z) = 1. \quad (3.19)$$

Ввиду симметрии задач (3.7), (3.8) и (3.18), (3.19) естественно считать, что они разрешимы обе и дают, действительно, взаимно обратные операторы. Здесь мы всегда полагаем, что это выполняется, однако доказательство этого факта весьма трудоемко и существует только для достаточно специального класса операторов B .

Если коэффициенты оператора K при $z \rightarrow \infty$ известны, то определяются и коэффициенты разложения оператора K^{-1} . Например, по (3.12) находим

$$K^{-1}(t, A) = 1 - v(t)A^{-1} - (w(t) - v^2(t))A^{-2} + \dots, \quad z \rightarrow \infty. \quad (3.20)$$

Применяя оператор K^{-1} к (3.15) и (3.17) с двух сторон, мы имеем

$$K^{-1}_{t_2} + K^{-1}A^2 = A^2K^{-1} + K^{-1}u, \quad (3.21)$$

$$K^{-1}\mathcal{L} = \mathcal{L}_0K^{-1}, \quad (3.22)$$

где операторы \mathcal{L} и \mathcal{L}_0 определены в (3.16). Последнее равенство можно записать в виде

$$\mathcal{L} = K\mathcal{L}_0K^{-1}, \quad (3.23)$$

что еще раз демонстрирует роль оператора K как оператора одевания.

Задача 5 Восстановить детали вывода асимптотического равенства (3.13).

4 Лекция.

4.1 Свойства символа оператора B

В случае достаточно быстрого убывания символа правой части (3.7) она может быть сведена с помощью формулы Коши–Грина к виду

$$\tilde{K}(t, z) = 1 + \int \frac{d\bar{w} \wedge dw}{2\pi i} \frac{\widetilde{(KB)}(t, w)}{z - w}. \quad (4.1)$$

Однако явный вид этого уравнения зависит от конкретных свойств символа оператора B . Чтобы установить их, отметим, что общее решение системы (2.13), (2.14) имеет вид

$$\tilde{B}(t, z) = \sum_{\alpha} e^{\alpha t_1 + [(\alpha+z)^2 - z^2]t_2 + [(\alpha+z)^3 - z^3]t_3} f(\alpha, z),$$

где суммирование распространяется по всем значениям α , в том числе оно может быть и интегрированием, а функция $f(\alpha, z)$ – произвольна и не зависит от t . Учитывая, что при вычислении произведения операторов по (2.11) нам приходится вычислять преобразование Фурье по переменной t_1 , естественно взять лишь те решения, для которых справедливо представление

$$\tilde{B}(t, z) = \int dp e^{ipt_1 + [(ip+z)^2 - z^2]t_2 + [(ip+z)^3 - z^3]t_3} f(ip, z), \quad (4.2)$$

где интегрирование идет по вещественным p от $-\infty$ до $+\infty$. Заметим теперь, что коэффициент при t_2 , вообще говоря, дает экспоненциальный рост, даже если функция $f(ip, z)$ локальна по p . Избавиться от него можно только при условии, что либо $p = 0$, либо $p = -2z_{\text{Im}}$. Первый выбор дает константное решение, а потому неинтересен. Поэтому мы рассмотрим только такие функции, для которых справедливо представление $f(ip, z) = \delta(p + 2z_{\text{Im}})b(z)$, так что

$$\tilde{B}(t, z) = e^{-2iz_{\text{Im}}t_1 + [\bar{z}^2 - z^2]t_2 + [\bar{z}^3 - z^3]t_3} b(z), \quad (4.3)$$

где $b(z)$ – некоторая функция своего аргумента. Заметим, что при этом коэффициент при t_3 также стал чисто мнимым.

Данные представления демонстрируют вырожденность законов дисперсии для всех рассматриваемых линейных уравнений (2.5): коэффициенты времен в показателях экспонент даются как разности функций двух переменных, например $\alpha + z$ и z . Именно это условие на линейную часть интегрируемого уравнения указывалось как необходимое в работе Захарова–Шульмана (1980).

В частности, для символа, данного в (4.3), уравнения (3.7) и (4.1) приобретают вид

$$\frac{\partial \tilde{K}(t, z)}{\partial \bar{z}} = \tilde{K}(t, \bar{z}) e^{-2iz_{\text{Im}}t_1 + [\bar{z}^2 - z^2]t_2 + [\bar{z}^3 - z^3]t_3} b(z), \quad (4.4)$$

$$\tilde{K}(t, z) = 1 + \int \frac{d\bar{w} \wedge dw}{2\pi i} \frac{\tilde{K}(t, \bar{w}) e^{-2iw_{\text{Im}}t_1 + [\bar{w}^2 - w^2]t_2 + [\bar{w}^3 - w^3]t_3} b(w)}{z - w}, \quad (4.5)$$

что, собственно, и называется $\bar{\partial}$ -задачей (с сопряжением).

Отметим, что в случае уравнения КПП, которое получается из КППИ заменой $t_2 \rightarrow it_2$ мы вместо (4.2) имеем

$$\tilde{B}(t, z) = \int dp e^{ipt_1 + i[(ip+z)^2 - z^2]t_2 + [(ip+z)^3 - z^3]t_3} f(ip, z), \quad (4.6)$$

так что вещественная часть коэффициента при t_2 теперь равна $-2pz_{\text{Re}}$. Ее зануление эквивалентно условию, что функция $f(ip, z)$ имеет представление $f(ip, z) = b(p, z_{\text{Im}})\delta(z_{\text{Re}})$ (мы опять опускаем тривиальное слагаемое пропорциональное $\delta(p)$, дающее константное решение). Итак, символ оператора B параметризуется теперь функцией двух вещественных переменных, $b(p, z_{\text{Im}})$, посредством

$$\tilde{B}(t, z) = \delta(z_{\text{Re}}) \int dp e^{ipt_1 - i[(p+z_{\text{Im}})^2 - z_{\text{Im}}^2]t_2 - i[(p+z_{\text{Im}})^3 - z_{\text{Im}}^3]t_3} b(p, z_{\text{Im}}). \quad (4.7)$$

В этом случае мы по (3.7) видим, что $\tilde{K}(t, z)$ аналитичен вне мнимой оси z . Такая задача восстановления функции по ее разрыву на некотором контуре называется (нелокальной ввиду наличия интеграла по p) задачей Римана–Гильберта.

И еще одно замечание. Оба представления, (4.3) и (4.7) допускают редукцию к случаю, когда символ оператора B , а тогда и сам оператор, не зависит от переменной t_2 . Так, во втором равенстве это означает, что $b(p, z_{\text{Im}}) \sim \delta(p + 2z_{\text{Im}})$:

$$\tilde{B}(t, z) = \delta(z_{\text{Re}}) e^{-2iz_{\text{Im}}t_1 + 2iz_{\text{Im}}^3 t_3} r(z_{\text{Im}}). \quad (4.8)$$

В силу равенства (2.5), в правой части которого выживают только члены с $n = 2m + 1$, мы имеем в этом случае иерархию уравнений

$$\frac{\partial B(t)}{\partial t_{2m+1}} = \frac{1}{4^m} \frac{\partial^{2m+1} B(t)}{\partial t_1^{2m+1}}, \quad m \geq 0, \quad (4.9)$$

что дает линейную часть уравнений иерархии КдФ. При $m = 0$ мы имеем тривиальное тождество: $B_{t_1} = B_{t_1}$, а при $m = 1$ получаем линейную часть уравнения (1.1):

$$B_{t_3}(t) = \frac{1}{4} B_{t_1 t_1 t_1}(t), \quad (4.10)$$

где мы проинтегрировали $2m - 1$ раз по переменной t_1 , предполагая достаточно быстрое убывание символа оператора B на t_1 -бесконечности. Мы видим, что в иерархии КдФ уравнений “в два раза меньше”, чем в иерархии КП - все уравнения по четным временам выпали, т.е. в силу сделанной редукции выпала зависимость символа B не только от t_2 , но и от всех четных времен, см (2.2).

5 Лекция.

5.1 Прямая задача

Уравнения (3.15) или (3.21) позволяют сформулировать прямую задачу, т.е. задачу определения оператора K или K^{-1} по заданной функции $u(t_1, t_2)$. Запишем (3.15) для символов операторов:

$$-\tilde{K}_{t_2}(t, z) + \tilde{K}_{t_1 t_1}(t, z) + 2z\tilde{K}_{t_1}(t, z) - u(t)\tilde{K}(t, z) = 0, \quad (5.1)$$

где мы воспользовались тем, что для $u(t)$, как и для любого оператора умножения в силу (2.7) $u(t) = \tilde{u}(t)$. Введем решение Йоста как

$$\varphi(t_1, t_2, z) = \tilde{K}(t_1, t_2, z)e^{zt_1+z^2t_2}. \quad (5.2)$$

Тогда (5.1) дает

$$-\varphi_{t_2} + \varphi_{t_1 t_1} - u(t)\varphi = 0, \quad (5.3)$$

т.е. уравнение теплопроводности, ср. (1.17). Это дифференциальное уравнение, совместно с асимптотическим условием, вытекающим из (3.8) и (5.2), можно представить в виде интегрального уравнения

$$\varphi(t, z) = e^{zt_1+z^2t_2} + \iint dt'_1 dt'_2 G(t_1 - t'_1, t_2 - t'_2, z)u(t')\varphi(t', z), \quad (5.4)$$

где мы ввели функцию Грина

$$G(t_1, t_2, z) = \frac{1}{2\pi} \int dp [\theta(-p(p + 2z_{\text{Im}})) - \theta(t_2)] e^{(ip+z)t_1 + (ip+z)^2 t_2} \quad (5.5)$$

и где θ означает функцию Хевисайда, см. Задачу 6. Разность этих функций обеспечивает сходимость интеграла по p . Кроме того, функция Грина обладает следующими свойствами:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} G(t_1, t_2, z)e^{-zt_1 - z^2 t_2} = 0, \quad \overline{G(t_1, t_2, z)} = G(t_1, t_2, \bar{z}), \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial G(t_1, t_2, z)}{\partial \bar{z}} = \frac{\text{sgn } z_{\text{Im}}}{2\pi i} e^{\bar{z}t_1 + \bar{z}^2 t_2}, \quad (5.7)$$

см. Задачи 7 и 8. Однозначная разрешимость прямой задачи, т.е. (5.4), доказана для гладких, достаточно быстро (быстрее $(t_1^2 + t_2^2)^{-1}$) убывающих на бесконечности $u(t_1, t_2)$. Для других потенциалов результатов нет. Предполагая однозначную разрешимость этой задачи, мы видим, что из вещественности потенциала $u(t_1, t_2)$ и свойства (5.7) следует, что

$$\overline{\varphi(t, z)} = \varphi(t, \bar{z}). \quad (5.8)$$

Кроме того, дифференцируя (5.4) по \bar{z} , мы в силу (5.7) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, z)}{\partial \bar{z}} &= e^{\bar{z}t_1 + \bar{z}^2 t_2} b(z) + \\ &+ \iint dt'_1 dt'_2 G(t_1 - t'_1, t_2 - t'_2, z)u(t') \frac{\partial \varphi(t', z)}{\partial \bar{z}}, \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$b(z) = \frac{\operatorname{sgn} z_{\operatorname{Im}}}{2\pi i} \iint dt_1 dt_2 e^{-\bar{z}t_1 - \bar{z}^2 t_2} u(t) \varphi(t, z) = \quad (5.9)$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} z_{\operatorname{Im}}}{2\pi i} \iint dt_1 dt_2 e^{(z-\bar{z})t_1 + (z-\bar{z})^2 t_2} u(t) \tilde{K}(t_1, t_2, z), \quad (5.10)$$

где в последнем равенстве мы воспользовались (5.2). Таким образом, функции $\frac{\partial \varphi(t, z)}{\partial \bar{z}}$ и $\varphi(t, \bar{z})b(z)$ удовлетворяют одному и тому же интегральному уравнению. Поэтому опять в силу однозначной разрешимости (5.4), и в силу того, что переменная z участвует в нем лишь как параметр, мы получаем равенство

$$\frac{\partial \varphi(t, z)}{\partial \bar{z}} = \varphi(t, \bar{z})b(z), \quad (5.11)$$

что в силу (5.2) эквивалентно (4.4) при $t_3 = 0$.

Задача 6 Доказать, что (5.5) – функция Грина уравнения теплопроводности: $-G_{t_2} + G_{t_1 t_1} = \delta(t)$.

Задача 7 Доказать, что функция Грина обладает свойствами (5.6).

Задача 8 Доказать равенство (5.7).

6 Лекция.

6.1 Сопряженная задача

Операторы K и K^{-1} близки по свойствам, что очевидно из сравнения уравнений (3.15) и (3.21). Первое из них мы привели к виду (5.3), используя тот факт, что если оператор $u(t_1)$ – оператор умножения, то $\tilde{u}(t_1) = u(t_1)$ (см. (2.7)). Тогда по (2.11): $\tilde{u}B(t_1, z) = u(t_1)\tilde{B}(t_1, z)$ для любого оператора B . Это означает, что символ $\tilde{B}(t_1, z)$, определенный в (2.7), есть **нормально упорядоченный символ**, как объясняется в (2.9). Понятно, что такое упорядочение не позволит записать последний произведение операторов в последнем члене правой части (3.21) в виде произведения символов. Для этого нам потребуется символ, упорядоченный **антинормально**, т.е. такая функция $\tilde{\tilde{B}}(t_1, z)$, что оператор $B(t_1, A)$ получается подстановкой оператора A вместо переменной z , но при этом вся зависимость от оператора A помещается слева. Итак, помимо представления (2.7) оператор $B(t_1, A)$ имеет представление

$$B(t_1, A)f(t_1) = \frac{1}{2\pi} \int dp \int dt'_1 e^{ip(t_1-t'_1)} \tilde{\tilde{B}}(t'_1, ip+z) f(t'_1), \quad (6.1)$$

где $\tilde{\tilde{B}}(t_1, z)$ – функция трех вещественных аргументов: t_1 , z_{Re} и z_{Im} . Мы будем называть эту функцию антинормально упорядоченным символом оператора B . В силу (2.6), (6.1) и (2.10) легко видеть, что

$$\tilde{\tilde{A}}(t_1, z) = z = \tilde{A}(t_1, z). \quad (6.2)$$

Пусть теперь имеются два оператора B и B' с символами, соответственно, $\tilde{\tilde{B}}(t_1, z)$ и $\tilde{\tilde{B}}'(t_1, z)$. Тогда для символа их композиции получаем

$$\widetilde{\tilde{\tilde{B}}B'}(t_1, z) = \frac{1}{2\pi} \int dp \int dt'_1 e^{ip(t'_1-t_1)} \tilde{\tilde{B}}(t'_1, z) \tilde{\tilde{B}}'(t_1, z+ip), \quad (6.3)$$

как следует из (6.1). В частности,

$$\widetilde{\tilde{\tilde{A}}B}(t_1, z) = z \tilde{\tilde{B}}(t_1, z), \quad (6.4)$$

$$\widetilde{\tilde{\tilde{B}}A}(t_1, z) = (-\partial_{t_1} + z) \tilde{\tilde{B}}(t_1, z), \quad (6.5)$$

а если $u(t_1)$ – оператор умножения,

$$\tilde{\tilde{u}}(t_1, z) = u(t_1), \quad (6.6)$$

$$\widetilde{\tilde{\tilde{B}}u}(t_1, z) = u(t_1) \tilde{\tilde{B}}(t_1, z). \quad (6.7)$$

Наконец, сравнивая (2.7) и (6.1), находим связь между двумя типами символов:

$$\int dp e^{ip(t_1-t'_1)} \tilde{\tilde{B}}(t'_1, z+ip) = \int dp e^{ip(t_1-t'_1)} \tilde{B}(t_1, z+ip), \quad (6.8)$$

см. Задачу 9. Вот теперь мы можем записать уравнение (3.21) в виде

$$\widetilde{\tilde{\tilde{K}}^{-1}}_{t_2}(t, z) + \widetilde{\tilde{\tilde{K}}^{-1}}_{t_1 t_1}(t, z) - 2z \widetilde{\tilde{\tilde{K}}^{-1}}_{t_1}(t, z) - \widetilde{\tilde{\tilde{K}}^{-1}}_{t_2}(t, z) u(t) = 0, \quad (6.9)$$

так что вводя

$$\varphi_-(t, z) = \widetilde{K}^{-1}(t, z) e^{-zt_1 - z^2 t_2}, \quad (6.10)$$

приводим его к виду

$$\varphi_{-,t_2} + \varphi_{-,t_1 t_1} - \varphi_- u(t) = 0. \quad (6.11)$$

Это уравнение – сопряженное к (5.3).

6.2 Асимптотическое разложение оператора одевания

Предположим, что символ оператора K допускает асимптотическое разложение

$$\tilde{K}(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n(t)}{z^n} \quad (6.12)$$

где $k_n(t)$ – функции t_1 и, вообще говоря, старших времен t_2, t_3 и т.д. В операторном виде мы будем писать:

$$K(t, A) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n(t) A^{-n} \quad (6.13)$$

Сравнивая с (3.11), видим, что $k_1(t) = v(t)$, $k_2(t) = w(t)$, так что

$$k_0(t) \equiv 1, \quad u = 2k_{1,t_1} \quad (6.14)$$

по (3.8) и (3.14). Тогда по (5.1) мы получаем (см. Задачу 10) набор рекуррентных соотношений для последовательного определения всех коэффициентов:

$$2k_{n+1,t_1} = k_{n,t_2} - k_{n,t_1 t_1} + u k_n \quad (6.15)$$

по заданному потенциалу $u(t)$ в уравнении (5.1). На самом деле ситуация более сложная, поскольку данное (6.15) определяет не сами коэффициенты, а их производные. Формулы непосредственно для коэффициентов должны следовать из интегрального уравнения (5.5), переписанного для символа оператора по (5.2). Однако при этом выясняется, что эти коэффициенты зависят, вообще говоря, от знака старшего из включенных времен. Здесь мы не имеем возможности останавливаться на этой проблеме более детально. Формально (6.15) дает:

$$k_{n+1}(t) = (-D_1^{-1} \mathcal{L})^n 1, \quad (6.16)$$

где мы учли (6.14), оператор D_1^{-1} – оператор интегрирования по t_1 и где мы ввели оператор

$$\mathcal{L} = -D_2 + D_1^2 - u(t), \quad (6.17)$$

где D_2 – оператор дифференцирования по t_2 , а n -ая степень означает последовательное применение интегро-дифференциальных операторов в скобках. В частности, осюда

$$k_{2,t_1} \equiv w_{t_1} = \frac{1}{2} [v_{t_2} - v_{t_1 t_1} - (v^2)_{t_1}]. \quad (6.18)$$

Понятно, что разложение такого же типа с теми же оговорками следует из (6.9) для $K^{-1}(t, A)$.

6.3 Уравнения эволюций оператора K

Рассмотрим теперь старшие эволюции оператора K . Подобно случаю t_2 , мы считаем, что эволюции оператора B заданы по (2.2): $B_{t_n} = [A^n, B]$, а зависимость оператора $K(t, A)$ от старших времен определяется задачей (3.7) с нормировкой (3.8). Тогда, в силу (3.6), мы получаем, что

$$\bar{\partial}(K_{t_n} + KA^n) = (K_{t_n} + KA^n)B. \quad n \geq 2.$$

Заметим, что в силу (3.18) $B = -(\bar{\partial}K^{-1})K$, что позволяет записать предыдущее равенство в виде $\bar{\partial}((K_{t_n} + KA^n)K^{-1}) = 0$. Итак, символ произведения $(K_{t_n} + KA^n)K^{-1}$ является аналитической функцией переменной z , а значит совпадает с полиномиальной частью этого же произведения. Для произвольного оператора $F(t, A)$ введем разбиение:

$$F = F_+ + F_-, \quad (6.19)$$

$$\tilde{F}_-(t, z) = \int \frac{d\bar{w} \wedge dw}{2\pi(z-w)} \frac{\partial \tilde{F}(t, w)}{\bar{\partial} w}. \quad (6.20)$$

Если последний интеграл существует и можно под знаком интеграла переходить к пределу $z \rightarrow \infty$, то символ $\tilde{F}_-(t, z)$ убывает на z -бесконечности. А в силу (6.19) и (6.20) $\bar{\partial}F_+ = 0$. При условии, что символы оператора принадлежат пространству \mathcal{S}' по переменной z , мы получаем, что $F_+(t, A)$ зависит от A полиномиально, т.е. является дифференциальным оператором. Далее, поскольку символ оператора $\tilde{K}_{t_n}(t, z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, как следует из (3.8), то первое слагаемое, $K_{t_n}K^{-1}$, не имеет полиномиальной части в силу (3.19). Итак:

$$(K_{t_n} + KA^n)K^{-1} = (KA^nK^{-1})_+. \quad (6.21)$$

Здесь $n = 0, 1, 2, \dots$, причем для единообразия мы положили $K_{t_0} = 0$. Введем оператор

$$\Gamma = KAK^{-1}, \quad (6.22)$$

так что $\Gamma^n = KA^nK^{-1}$ и равенство (6.21) принимает вид

$$K_{t_n} + KA^n = (\Gamma^n)_+K. \quad (6.23)$$

Именно это равенство и задает динамику оператора K по старшим временам. Отметим, что поскольку $\Gamma^n = (\Gamma^n)_+ + (\Gamma^n)_-$ и $\Gamma^n K = KA^n$, то, помимо (6.23), имеем

$$K_{t_n} = -(\Gamma^n)_-K. \quad (6.24)$$

6.4 Свойства оператора Γ

Как следует из (3.7), (3.18) и (2.2), оператор Γ удовлетворяет

$$\bar{\partial}\Gamma = -KB_{t_1}K^{-1}, \quad (6.25)$$

а поскольку $\Gamma^n = KA^nK^{-1}$, то и

$$\bar{\partial}\Gamma^n = -KB_{t_n}K^{-1}, \quad (6.26)$$

Далее, по определению

$$\Gamma K = KA, \quad (6.27)$$

что формально, ср. (2.9) и первое равенство в (2.11), можно записать как

$$:\Gamma(t, D_1 + z): \tilde{K}(t, z) = z \tilde{K}(t, z), \quad (6.28)$$

что означает, что $\tilde{K}(t, z)$ – собственная функция для оператора Γ .

Асимптотические свойства символа $\tilde{\Gamma}(t, z)$ по переменной z следуют, конечно, из асимптотических свойств операторов символов операторов K и K^{-1} . Поскольку $\Gamma = A - [A, K]K^{-1}$, то $\tilde{\Gamma}(t, z)$ растет линейно, причем константный член отсутствует. Аналогичный результат следует и из (3.12), (3.20), так что мы имеем

$$\Gamma(t, A) = A + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m A^{-m}, \quad (6.29)$$

и аналогично

$$\Gamma^n(t, A) = A^n + \sum_{m=2-n}^{\infty} \gamma_{n,m} A^{-m}, \quad n \geq 2, \quad (6.30)$$

где также отсутствует член степени $n - 1$.

Временная зависимость $\Gamma^m(t, A)$ следует из (6.23) и (6.24):

$$\partial_{t_n} \Gamma^m = [\Gamma^m, (\Gamma^n)_-] \equiv -[\Gamma^m, (\Gamma^n)_+], \quad (6.31)$$

где мы воспользовались тем, что $[\Gamma^m, \Gamma^n] = 0$. Антисимметризуем это равенство:

$$\begin{aligned} \partial_{t_n} \Gamma^m - \partial_{t_m} \Gamma^n &= [\Gamma^m, (\Gamma^n)_-] + [\Gamma^m, (\Gamma^m)_+] = \\ &= [(\Gamma^m)_+ + (\Gamma^m)_-, (\Gamma^n)_-] + [(\Gamma^n)_+ + (\Gamma^n)_-, (\Gamma^m)_+] = \\ &= [(\Gamma^m)_-, (\Gamma^n)_-] + [(\Gamma^n)_+, (\Gamma^m)_+]. \end{aligned}$$

что дает выражение, разложенное на полиномиальную и убывающие части (см. Задача 11). Разлагая аналогично исходное выражение, получаем:

$$\partial_{t_n} (\Gamma^m)_+ - \partial_{t_m} (\Gamma^n)_+ = [(\Gamma^n)_+, (\Gamma^m)_+], \quad (6.32)$$

$$\partial_{t_n} (\Gamma^m)_- - \partial_{t_m} (\Gamma^n)_- = [(\Gamma^m)_-, (\Gamma^n)_-], \quad (6.33)$$

Задача 9 Доказать равенство (6.8).

Задача 10 Вывести рекуррентную формулу (6.15).

Задача 11 Пусть F и G – два произвольных оператора рассматриваемого класса. Доказать, что коммутатор $[F_+, G_+]$ является дифференциальным оператором, а символ коммутатора $[F_-, G_-]$ убывает с ростом z .

7 Лекция

7.1 Уравнение КПП и формулировка в терминах решений Йоста

Рассмотрим частные случаи предыдущего построения. При $n = 2$ сравнение (3.15) и (6.23) дает

$$(\Gamma^2)_+ = A^2 - u. \quad (7.1)$$

Для того, чтобы найти $(\Gamma^3)_+$ заметим, что в силу (3.21)

$$\begin{aligned} KA^3K^{-1} &= A^3 + K[A, K^{-1}]A^2 + KA[A^2, K^{-1}] = \\ &= A^3 + KK^{-1}_{t_1}A^2 + K(K^{-1}_{t_2} - K^{-1}u)A + \\ &+ K(K^{-1}_{t_2} - K^{-1}u)_{t_1}, \end{aligned}$$

где использовано (3.21). По (3.12), (3.14), (3.20) и (6.18), (6.22), находим

$$(\Gamma^3)_+ = A^3 - \frac{3}{2}uA - \frac{3}{4}u_{t_1} - \frac{3}{4} \int^{t_1} u_{t_2}, \quad (7.2)$$

где $\int^{t_1} u_{t_2}$ означает первообразную $u_{t_2}(t)$ по переменной t_1 . Теперь (6.32) для $m = 2$ и $n = 3$ дает

$$(-4u_{t_3} - 6uu_{t_1} + u_{t_1t_1t_1})_{t_1} = -3u_{t_2t_2}, \quad (7.3)$$

что есть уравнение КПП, (1.16), при $x = t_1$, $y = t_2$ и $t = -4t_3$.

Рассмотрим ситуацию, когда “включено” некоторое количество старших времен, $t = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$, и переведем изложенные выше результаты на язык решений Йоста. По аналогии с (5.2) введем их посредством

$$\varphi(t, z) = \tilde{K}(t, z)e^{zt_1 + z^2t_2 + \dots + z^Nt_N}. \quad (7.4)$$

При такой подстановке равенство (6.28) сводится к

$$\Gamma(t, \partial_{t_1}) \varphi(t, z) = z \varphi(t, z), \quad (7.5)$$

так что $\varphi(t, z)$ – собственная функция для оператора $\Gamma(t, \partial_{t_1})$. Сам этот оператор формально можно понимать как заданный символом $\tilde{\Gamma}(t, z)$ при подстановке $z \rightarrow \partial_{t_1}$ и нормальном упорядочении результата. Формально, по (6.29)

$$\Gamma(t, \partial_{t_1}) = \partial_{t_1} + \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \partial_{t_1}^{-m}, \quad (7.6)$$

где выражения типа $\partial_{t_1}^{-1}$ понимаются как интегральные операторы. Для преодоления неоднозначности их определения следует либо заручиться более детальной информацией о поведении функции $u(t_1, t_2)$, либо добавлять дополнительные дифференцирования по t_1 , как например в (7.3), где левая часть содержит общую производную по t_1 . Именно этот эффект был виден с самого начала: в левой части (2.5) помимо дифференцирования по t_n имеется $n - 2$ дифференцирования по t_1 .

Далее, в силу (7.4) равенство (6.23) принимает вид

$$\varphi_{t_n}(t, z) = \mathcal{A}_n(t, \partial_{t_1}) \varphi(t, z), \quad (7.7)$$

где мы ввели дифференциальный оператор

$$\mathcal{A}_n(t, \partial_{t_1}) =: (\tilde{\Gamma}^n)_+(t, \partial_{t_1}); \quad (7.8)$$

который ввиду (6.30) можно записать в виде формального ряда

$$\mathcal{A}_n(t, \partial_{t_1}) = \partial_{t_1}^n + \sum_{m=2-n}^{\infty} \gamma_{n,m}(t) \partial_{t_1}^{-m}. \quad n \geq 2, \quad (7.9)$$

Введем дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = -\partial_{t_2} + \mathcal{A}_2, \quad (7.10)$$

так что по (3.16)

$$\mathcal{A}_2(t, \partial_{t_1}) = \partial_{t_1}^2 - u(t), \quad (7.11)$$

что легко следует и из (7.8). Мы получили лаксов оператор, данный в (1.17), т.е. оператор теплопроводности. А (7.7) при $n = 2$ есть (5.3):

$$\mathcal{L} \varphi = 0, \quad (7.12)$$

так что $\varphi(t, z)$ – собственная функция оператора \mathcal{L} (при нулевой энергии). Далее, по (6.32) мы получаем систему Захарова–Шабата:

$$\mathcal{A}_{m,t_n} - \mathcal{A}_{n,t_m} = [\mathcal{A}_n, \mathcal{A}_m]. \quad (7.13)$$

В частности, при $m = 2$

$$-\mathcal{A}_{n,t_2} + [\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_n] = \mathcal{A}_{2,t_n}$$

что в силу (7.10) дает иерархию КПП

$$\mathcal{L}_{t_n} = [\mathcal{L}, \mathcal{A}_n]. \quad (7.14)$$

Иерархия интегрируемых уравнений – это (бесконечный) набор интегрируемых уравнений с одним и тем же оператором Лакса.

7.2 Законы сохранения

Запишем (3.15) как $uK = -K_{t_2} + [A^2, K] \equiv -K_{t_2} + K_{t_1 t_1} + 2K_{t_1} A$, так что правая часть содержит лишь производные по t_1 и t_2 . Отсюда

$$(uK)_{t_n} = -\partial_{t_2} K_{t_n} + \partial_{t_1} (K_{t_1 t_n} + 2K_{t_n} A), \quad (7.15)$$

что и дает бесконечный набор законов сохранения. В случае, когда $K_{t_n}(t)$ убывает при $t_1, t_2 \rightarrow \infty$, левая часть может быть проинтегрирована:

$$J(z) = \iint dt_1 dt_2 u(t) \tilde{K}(t, z) \equiv \iint dt_1 dt_2 e^{zt_1 - z^2 t_2} u(t) \varphi(t, z), \quad (7.16)$$

где мы воспользовались (5.11) во втором равенстве. Тогда (7.15) дает

$$\partial_{t_n} J(z) = 0. \quad (7.17)$$

Таким образом мы получаем бесконечный набор интегралов движения – коэффициентов разложения $I(z)$ по степеням $1/z$:

$$J(z) = \sum_{m=0}^{\infty} j_m z^{-m}. \quad (7.18)$$

где в силу (6.12)

$$j_m = \iint dt_1 dt_2 u(t) k_m(t, z). \quad (7.19)$$

Все эти интегралы движения выражаются через потенциал u , его производные и первообразные полиномиально. Все эти интегралы функционально независимы, поскольку по (6.15) порядок производной по t_2 нарастает с ростом m . Если $v(t)$ убывает с ростом t_1 и t_2 , то по (6.14) и (6.18)

$$j_0 = \iint dt_1 dt_2 u(t), \quad j_1 = 0, \quad j_2 = \frac{-1}{4} \iint dt_1 dt_2 u^2(t). \quad (7.20)$$

Предположим, что $u(t)$ быстро убывает по t_1 и t_2 . Рассмотрим $\bar{\partial}$ -производную $J(z)$. В силу (5.11), второго равенства в (7.16) и определения (7.18) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(z)}{\partial \bar{z}} &= \iint dt_1 dt_2 e^{zt_1 - z^2 t_2} u(t) \varphi(t, \bar{z}) b(z) = \\ &= -2\pi i \operatorname{sgn} z_{\operatorname{Im}} |b(z)|^2, \end{aligned} \quad (7.21)$$

где было использовано (5.9) для $b(\bar{z})$. По (7.18) $J(z) \rightarrow j_0$ при $z \rightarrow \infty$, так что

$$J(z) = j_0 - 2i \int d\bar{w} \wedge dw \frac{\operatorname{sgn} w_{\operatorname{Im}}}{z - w} |b(w)|^2. \quad (7.22)$$

Отсюда

$$j_n = -2i \int d\bar{w} \wedge dw w^{n-1} \operatorname{sgn} w_{\operatorname{Im}} |b(w)|^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.23)$$

Для справедливости этих равенств требуется не только быстрое убывание $u(t)$, но и достаточно быстрое убывание $b(z)$. При этом все $j_{n \geq 1}$ однозначно определяются в терминах данных рассеяния $b(z)$, в отличие от необходимости пользоваться рекуррентной процедурой (6.15) при выражении их через $u(t)$ посредством (7.19). Отметим, что в силу (2.11) и (4.3)

$$\widetilde{B}^2(t, z) = |b(z)|^2. \quad (7.24)$$

8 Лекция. Преобразование Бэклунда и дискретные системы

Помимо коммутаторов в привычном, алгебраическом, смысле, существует понятие коммутатора в смысле групп. Рассмотрим близкое понятие: преобразование подобия, которое, как легко понять, задает дискретную динамику. Введем оператор B зависимость от дискретного параметра

$$B(n, t, A) = (A - a_1)^{n_1} B(t, A) (A - a_1)^{-n_1}, \quad (8.1)$$

где a_1 – произвольная константа, а зависимость от t задается по (2.2). Вспоминая как мы выводили коммутаторные тождества в разд. 2.1, заметим, что для любых x и y выполняется тождество

$$\{(x^2 - y^2) - (x - y)^2 - a(x - y)\} \frac{x - a}{y - a} = (x^2 - y^2) + (x - y)^2 - a(x - y).$$

Это позволяет считать, что для произвольных элементов ассоциативной алгебры выполнено коммутаторное тождество

$$\begin{aligned} (A - a_1)\{[A^2, B] - [A, [A, B]] - 2a_1[A, B]\}(A - a_1)^{-1} = \\ = [A^2, B] + [A, [A, B]] - 2a_1[A, B], \end{aligned} \quad (8.2)$$

которое легко проверить и непосредственно. Для произвольного оператора $F(n)$ введем обозначения

$$F^{(1)}(n) = F(n + 1), \quad F_1(n) = F^{(1)}(n) - F(n). \quad (8.3)$$

Имея ввиду, что динамика оператора B по t_1 и t_1 задается (2.2), мы видим, что в силу (8.2) этот оператор удовлетворяет дифференциально-разностному уравнению

$$B_{1,t_2} - B_{1,t_1 t_1} - 2a_1 B_{1,t_1} = 2B_{t_1 t_1}. \quad (8.4)$$

Полагая теперь, что оператор K зависит от дискретной переменной в силу зависимости B , по (3.7), (3.8) находим

$$\bar{\partial} K^{(1)} = K^{(1)}(A - a_1)B(A - a_1)^{-1}, \quad (8.5)$$

Вспомним, что по (3.18) $B = -(\bar{\partial} K^{-1})K$. Тогда из предыдущего:

$$\bar{\partial}(K^{(1)}(A - a_1)K^{-1}) = 0, \quad (8.6)$$

так что, как и раньше, $K^{(1)}(A - a_1) = (A - a_1 + x)K$, где x – оператор умножения. Отсюда, используя (3.11), подобно выводу (3.15) получаем

$$K^{(1)}(A - a_1) = (A - a_1 + v_1)K. \quad (8.7)$$

Поскольку по построению очевидно, что производные по t и сдвиги по дискретной переменной коммутируют между собой, то понятно, что последнее уравнение совместно с (3.15): $(K^{(1)})_{t_2} = (K_{t_2})^{(1)}$. Отсюда следует уравнение движения:

$$v_{1,t_2} - v_{1,t_1 t_1} + ((v_1 - a_1)^2)_{t_1} = 2v_{t_1 t_1}. \quad (8.8)$$

Выведем пару Лакса для этого уравнения. Запишем (8.7) в терминах символов операторов:

$$\tilde{K}(n+1, t, z)(z - a_1) = (\partial_{t_1} + z - a_1 + v_1)\tilde{K}(n, t, z), \quad (8.9)$$

где мы использовали (2.6), (2.10) и (8.3). Таким образом, чтобы удалить явную зависимость коэффициентов от z , мы должны ввести решение Йоста как (ср. (7.4))

$$\varphi(n, t, z) = \tilde{K}(n, t, z)(z - a_1)^n e^{zt_1 + z^2 t_2}. \quad (8.10)$$

Тогда (3.15), как и ранее, приводит к уравнению теплопроводности (5.3):

$$-\varphi_{t_2}(n, t, z) + \varphi_{t_1 t_1}(n, t, z) - 2v_{t_1}(n, t) \varphi(n, t, z) = 0, \quad (8.11)$$

где мы использовали (3.14), а второе уравнение пары следует из (8.9), (8.10):

$$\varphi(n+1, t, z) = \varphi_{t_1}(n, t, z) + (v_1(n, t) - a_1) \varphi(n, t, z). \quad (8.12)$$

Таким образом зависимость решений Йоста от z задается только асимптотическим условием (см. (3.8) и (8.10))

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(n, t, z)(z - a_1)^{-n} e^{-zt_1 - z^2 t_2} = 1. \quad (8.13)$$

Положим

$$\xi(n, t) = v(n, t) - a_1 n, \text{ так что } \xi_1(n, t) = v_1(n, t) - a_1. \quad (8.14)$$

Тогда нелинейное уравнение и пара Лакса принимают более простой вид:

$$\xi_{1, t_2} - \xi_{1, t_1 t_1} + (\xi_1)_{t_1}^2 = 2\xi_{t_1 t_1}, \quad (8.15)$$

$$\varphi_{t_2}(n, t, z) = \varphi_{t_1 t_1}(n, t, z) - 2\xi_{t_1}(n, t) \varphi(n, t, z) = 0, \quad (8.16)$$

$$\varphi(n+1, t, z) = \varphi_{t_1}(n, t, z) + \xi_1(n, t) \varphi(n, t, z). \quad (8.17)$$

Интересно отметить, что подобно КП уравнение (8.15) допускает редукцию к дифференциально-разностному уравнению

$$\xi_{1, t_1} + 2\xi_{t_1} = (\xi_1)^2, \quad (8.18)$$

при условии, что $\xi(t)$ не зависит от t_2 , что позволяет проинтегрировать один раз по t_1 . Отметим также, что уравнения (8.15) и (8.18) на функцию $\xi(n, t)$, не содержат параметр a_1 . Этот параметр входит только через посредство (8.14), где $v(n, t)$ предполагается убывающей с ростом аргументов.

Уравнение (8.15) и пара Лакса (8.16), (8.17) действительно являются дискретизацией КПИ и его пары в том смысле, что равенство (2.1) следует из (8.2), см. задачу 12.

Задача 12 Ввиду произвольности операторов A и B в (8.2), заменим в нем при $a_1 = 0$ оператор A на e^{Ax} , где x – произвольный параметр. Покажите, что в порядке x^4 полученное равенство совпадает с (2.1).

9 Лекция. Дальнейшая дискретизация КШ

Введем по аналогии с (8.1) зависимость еще от одного дискретного параметра, n_2 :

$$B(n, t, A) = (A - a_1)^{n_1} (A - a_1)^{n_2} B(t, A) (A - a_1)^{-n_1} (A - a_1)^{-n_2}, \quad (9.1)$$

где a_2 – некоторый параметр, отличный от a_1 . Замечая, что для любых x и y справедливо тождество

$$(x - y) \left(\frac{x - a_1}{y - a_1} - \frac{x - a_2}{y - a_2} \right) = a_{12} \left(\frac{x - a_1}{y - a_1} - 1 \right) \left(\frac{x - a_2}{y - a_2} - 1 \right),$$

где мы ввели обозначение

$$a_{12} = a_1 - a_2, \quad (9.2)$$

мы приходим к коммутаторному тождеству

$$\begin{aligned} & (A - a_1)[A, B](A - a_1)^{-1} - (A - a_2)[A, B](A - a_2)^{-1} = \\ & = a_{12} \left((A - a_1)(A - a_2)B(A - a_1)^{-1}(A - a_2)^{-1} - \right. \\ & \quad \left. - (A - a_1)B(A - a_1)^{-1} - (A - a_2)B(A - a_2)^{-1} + B \right). \end{aligned}$$

Как и ранее, его можно проверить непосредственно. Обозначим по аналогии с (8.3)

$$F^{(2)}(n_1, n_2) = F(n_1, n_2 + 1), \quad F_2(n_1, n_2) = F^{(2)}(n_1, n_2) - F(n_1, n_2) \quad (9.3)$$

для произвольного оператора F .

Внимание: $F^{(2)} \neq F^{(1,1)}$ и $F_2 \neq F_{1,1}$.

В терминах этих обозначений предыдущее тождество означает, что оператор $B(n_1, n_2, t_1) \equiv B(n, t)$ удовлетворяет уравнению

$$B_{1,t_1} - B_{2,t_1} = a_{12}B_{1,2}. \quad (9.4)$$

Далее, по аналогии с (8.7) мы находим, что оператор одевания удовлетворяет уравнению

$$K^{(2)}(A - a_2) = (A - a_2 + v_2)K, \quad (9.5)$$

которое при определении решения Йоста (ср. (8.10)) посредством

$$\varphi(n, t, z) = \tilde{K}(n, t, z)(z - a_1)^{n_1}(z - a_2)^{n_2}e^{zt_1}, \quad (9.6)$$

дает пару Лакса в виде

$$\varphi(n_1 + 1, n_2, t, z) = \varphi_{t_1}(n, t, z) + (v_1(n, t) - a_1) \varphi(n, t, z), \quad (9.7)$$

$$\varphi(n_1, n_2 + 1, t, z) = \varphi_{t_1}(n, t, z) + (v_2(n, t) - a_2) \varphi(n, t, z), \quad (9.8)$$

где первое уравнение есть (8.12). Совместность этих уравнений означает, что

$$(v_1 - v_2)_{t_1} - a_{12}v_{1,2} + v_{1,2}(v_1 - v_2) = 0. \quad (9.9)$$

Положим по аналогии с (8.14):

$$\xi(n, t) = v(n, t) - a_1 n_1 - a_2 n_3, \quad (9.10)$$

$$\text{так что } \xi_1(n, t) = v_1(n, t) - a_1, \quad \xi_2(n, t) = v_2(n, t) - a_2.$$

Тогда нелинейное дифференциально-разностное уравнение и пара Лакса принимают вид:

$$(\xi_1 - \xi_2)_{t_1} + \xi_{1,2}(\xi_1 - \xi_2) = 0. \quad (9.11)$$

$$\varphi^{(1)} = \varphi_{t_1} + \xi_1 \varphi, \quad (9.12)$$

$$\varphi^{(2)} = \varphi_{t_1} + \xi_2 \varphi. \quad (9.13)$$

Можно продолжить дискретизацию КПП, полагая, что оператор B зависит от трех дискретных переменных:

$$B(n_1, n_2, n_3) = \left(\prod_{m=1}^3 (A - a_m)^{n_m} \right) B \left(\prod_{m=1}^3 (A - a_n)^{n_m} \right)^{-1}, \quad (9.14)$$

что в тех же обозначениях, что и выше означает, что он удовлетворяет разностному уравнению

$$(a_1 - a_2)B_{1,2}(m) + (a_2 - a_3)B_{2,3}(m) + (a_3 - a_1)B_{1,3}(m) = 0. \quad (9.15)$$

Посредством процедуры одевания мы приходим к нелинейному уравнению

$$[a_{12} - v_1 + v_2]v_{1,2} + [a_{23} - v_2 + v_3]v_{2,3} + [a_{31} - v_3 + v_1]v_{3,1} = 0 \quad (9.16)$$

на функцию $v = v(n_1, n_2, n_3)$ трех дискретных переменных, для которого (9.15) является линеаризацией. Вводя теперь функцию $\xi(n) = v(n) - a_1 n_1 - a_2 n_2 - a_3 n_3$, мы приводим (9.16) к знаменитому разностному уравнению Хироты:

$$[\xi_1 - \xi_2]\xi_{1,2} + [\xi_2 - \xi_3]\xi_{2,3} + [\xi_3 - \xi_1]\xi_{3,1} = 0. \quad (9.17)$$

Аналогично предыдущим построениям выводится и пара Лакса этого уравнения:

$$\varphi_2(n, k) = \varphi_1(n, k) + (\xi_2(n) - \xi_1(n))\varphi(n, k), \quad (9.18)$$

$$\varphi_3(n, k) = \varphi_1(n, k) + (\xi_3(n) - \xi_1(n))\varphi(n, k). \quad (9.19)$$

Посредством предельных процедур уравнение Хироты порождает многие (в неабелевом случае – возможно, все) интегрируемые уравнения.

10 Лекция

10.1 Редукция к КдФ

Как уже говорилось, уравнение КдФ является редукцией уравнения КП при условии, что $B(t)$ (или $u(t)$) не зависит от t_2 . Тогда (7.3) сводится к

$$-4u_{t_3} - 6uu_{t_1} + u_{t_1 t_1 t_1} = 0 \quad (10.1)$$

при некоторых дополнительных предположениях, например, достаточно быстрого убывания $u(t_1, t_3)$ по t_1 . В обычной записи используются обозначения $x = t_1$ и $t = -4t_3$, см. (1.1). В Лекции 4 было показано, что условие независимости символа оператора B от t_2 приводит этот символ к виду (4.8), Тогда $\bar{\partial}$ -задача (3.7) показывает, что символ $\tilde{K}(t, z)$ оператора K аналитичен в полуплоскостях $z_{\text{Re}} \geq 0$, т.е. обратную задачу естественно формулировать как задачу Римана–Гильберта, задачу о построении функции аналитической вне контура по заданному соотношению ее предельных значений на контуре. Мы рассмотрим эту задачу и ее решение подробно в дальнейшем. Здесь мы рассмотрим результаты данной редукции для других объектов, введенных ранее.

Ввиду независимости $B(t)$ от t_2 , от него не зависит также и оператор одеваания $K(t)$, так что 3.15 сводится к

$$(A^2 - u)K = KA^2, \quad (10.2)$$

а по (6.26) Γ^2 – полином. Таким образом $\Gamma^2 = (\Gamma^2)_+$ и по (7.1)

$$\Gamma^2 = A^2 - u, \quad (10.3)$$

т.е. квадрат псевдодифференциального оператора оказывается чисто дифференциальным оператором. В силу (6.24) это условие является определяющим КдФ, поскольку эквивалентно условию независимости от t_2 . Более того, поскольку $\Gamma^{2k} = (\Gamma^2)^k$ для любого целого неотрицательного k , то дифференциальными операторами оказываются и все четные степени оператора Γ , а тогда (6.24) означает, что исключив зависимость от t_2 , мы исключаем и зависимость от всех старших четных времен. Переходя к решениям Йоста, отметим, что опять же ввиду независимости от t_2 , эти решения нужно определять как

$$\varphi(t, z) = \tilde{K}(t, z)e^{zt_1 + z^3 t_3 + z^5 t_5 + \dots}, \quad (10.4)$$

в отличие от (7.4). Тогда (10.2) сводится к спектральной задаче для стационарного уравнения Шредингера,

$$-\varphi_{t_1 t_1}(t, z) + u(t)\varphi(t, z) = -z^2\varphi(t, z), \quad (10.5)$$

где $-z^2$ играет роль спектрального параметра. Второй оператор лаكсовой пары, (1.13), получается по (7.7), (7.8), причем теперь в $(\Gamma^3)_+$ отсутствует интегральный член, см. (7.2).

Проблема возникает при рассмотрении интегралов движения. Действительно, как следует из (7.20), интегралы КПИ, определенные в (7.16) и (7.18), становятся расходящимися, когда $u(t)$ не зависит от t_2 . Однако тут есть другой способ построения интегралов движения. Для этого сопоставим каждому псевдодифференциальному оператору $F(t, A)$ его вычет $\text{res } F(t)$: оператор умножения,

задаваемый как

$$\operatorname{res} F(t) = \oint_C \frac{dw}{2\pi i} \tilde{F}(t, w) = \int \frac{d\bar{w} \wedge dw}{2\pi i} \frac{\partial \tilde{F}(t, w)}{\partial \bar{w}}, Z \quad (10.6)$$

где C – контур в окрестности бесконечности z -плоскости и предполагается, что данный интеграл существует и не зависит от выбора контура. Второе равенство следует из (6.20) в случае сходимости интегралов. Таким образом, вычет оператора – коэффициент при $1/z$ формального разложения символа оператора на бесконечности. Поэтому вычет коммутатора дифференциальных операторов, как и вычет коммутатора двух операторов, символы которых убывают, равен нулю. Пусть имеются два оператора, $F(t, A)$ и $G(t, A)$, в силу сказанного $\operatorname{res}[F, G] = \operatorname{res}[F_+, G_-] + \operatorname{res}[F_-, G_+]$. Рассмотрим, скажем, второй вычет, причем положим $G(t, A) = g(t)A^n$, где $g(t)$ – оператор умножения, а целое $n \geq 0$. В силу (2.11) и (10.6)

$$\begin{aligned} \operatorname{res}[F_-(t, A), g(t)A^n] &= \frac{1}{2\pi} \int dp \int dt'_1 \int \frac{d\bar{w} \wedge dw}{2\pi i} \times \\ &\times \left(\frac{\partial \tilde{F}(t, w)}{\partial \bar{w}} g(t')(w - ip)^n - \frac{\partial \tilde{F}(t', w)}{\partial \bar{w}} g(t)(w + ip)^n \right). \end{aligned}$$

Вводя моменты

$$f_k(t) = \int \frac{d\bar{w} \wedge dw}{2\pi i} \frac{\partial \tilde{F}(t, w)}{\partial \bar{w}} w^k,$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{res}[F_-(t, A), g(t)A^n] &= \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n!}{(j+1)!(n-j-1)!} (f_{n-j-1}(t)(-\partial_{t_1})^{j+1}g(t) - (\partial_{t_1}^{j+1}f_{n-j-1}(t))g(t)). \end{aligned}$$

Заметим, что для любых функций $f(t_1)$ и $g(t_1)$ выполняется тождество

$$f(t)(-\partial_{t_1})^{j+1}g(t) - (\partial_{t_1}^{j+1}f_{n-j-1}(j-l)(t))g(t) = -\partial_{t_1} \sum_{l=0}^j (-1)^l f^{(l)}(t)g^{j-l},$$

которое легко проверить непосредственно. Это означает, что $\operatorname{res}[F_-(t, A), g(t)A^n]$ является полной производной. А тогда это же справедливо для $\operatorname{res}[F_-, G_+]$ и для $\operatorname{res}[F, G]$ где F и G – произвольные (с точностью до законности проведенного вывода) операторы. Таким образом по (6.31) мы получаем, что оператор умножения $\partial_{t_n} \operatorname{res} \Gamma^m$ является полной производной по t_1 , а в случае бесконечной дифференцируемости $u(t)$ и его достаточно быстрого убывания вместе со всеми своими производными при $t_1 \rightarrow \infty$, набор интегралов движения дается посредством

$$I_{2n+1} = \int dt_1 \operatorname{res} \Gamma^{2n+1}(t), \quad (10.7)$$

где мы учли, что четные интегралы выпадают.

10.2 Общая схема метода обратной задачи. Уравнение Кортевега–де Фриза

Рассмотрим теперь подробнее схему метода обратной задачи на примере уравнения Кортевега–де Фриза. Лаксова пара для него дана в (1.12) и (1.13):

$$\mathcal{L} = -\partial_x^2 + u, \quad (10.8)$$

$$\mathcal{A} = 4\partial_x^3 - 6u\partial_x - 3u_x. \quad (10.9)$$

Важнейшей особенностью пары Лакса является то, что временная производная не входит в \mathcal{L} -оператор. Таким образом мы можем рассматривать t как параметр и исследовать спектральные свойства этого оператора, т.е., исследовать решения уравнения

$$\mathcal{L}y = \lambda y, \quad (10.10)$$

где мы ввели $\lambda = -z^2$. Это уравнение на функцию $y(t, x)$ есть **спектральная проблема** для оператора (1.12), иногда оно также называется **вспомогательной линейной задачей** для рассматриваемого нелинейного уравнения. Заметим, что в силу (1.11)

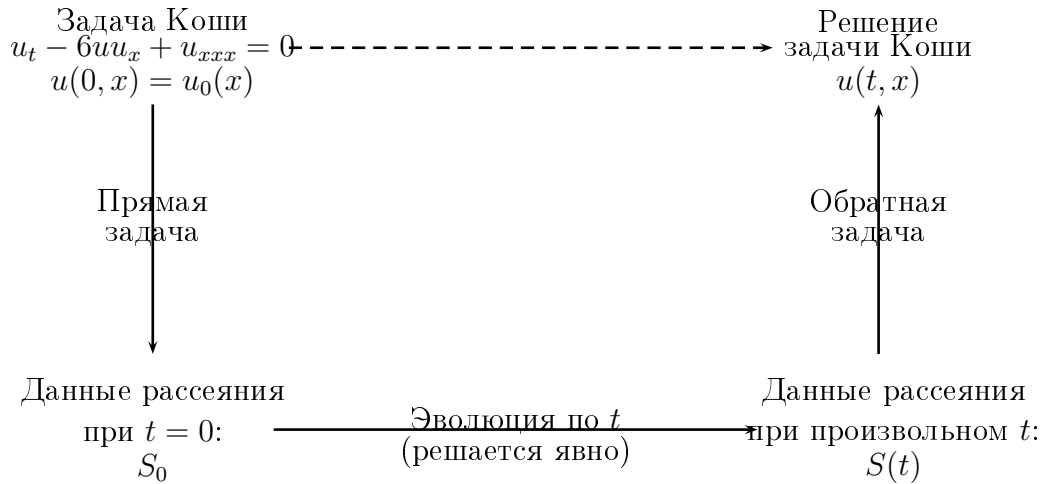
$$(\mathcal{L} - \lambda)(y_t + \mathcal{A}y) = 0, \quad (10.11)$$

т.е. комбинация $y_t + \mathcal{A}y$ также удовлетворяет уравнению (10.10), но не обязана быть нулем. В то же время, уравнение

$$y_t = -\mathcal{A}y \quad (10.12)$$

совместно с уравнением (10.10) в силу (1.11). Здесь уместно подчеркнуть, что совместность уравнений означает лишь наличие их общего решения, но отнюдь не то, что каждое решение одного из них будет решением и другого.

Уравнение (10.10) хорошо известно в физике: это стационарное одномерное уравнение Шредингера. Впрочем, оно также исследовалось математиками еще в XIX веке (уравнение Штурма–Лиувилля). Для нас важно, что для уравнения (10.10) разрешимы прямая и обратная задачи рассеяния. Прямая задача: определение по потенциалу u данных рассеяния, которые мы обозначим S . Их определения и свойства будут даны в последующих лекциях. Обратная задача: восстановление потенциала u по данным рассеяния. При этом мы покажем как из условия достаточно быстрого убывания потенциала на пространственной бесконечности равенства (10.11) и (10.12) приводят к линейным дифференциальным уравнениям по t на данные рассеяния. Таким образом, как уже говорилось, общая схема метода обратной задачи рассеяния в применении к теории нелинейных интегрируемых уравнений демонстрируется следующей диаграммой: По заданному начальному данному $u_0(x)$ строятся отвечающие ему данные рассеяния S_0 . Далее, явно решается уравнение временной эволюции для спектральных данных, т.е. мы находим данные рассеяния $S(t)$. По ним, используя уравнения обратной задачи, мы восстанавливаем потенциал $u(t, x)$, который ввиду эквивалентности (1.11) и уравнения КдФ (1.1) есть решение этого нелинейного уравнения и поставленной задачи Коши. Таким образом, решение нелинейного уравнения свелось к решению трех линейных задач, одна из которых решается



явно! Как мы видели ранее, весь метод основан именно на разрешимости обратной задачи. Это – основное условие применимости метода. Очевидно, что для уравнения (1.1) есть и гораздо более простая “лаксова пара”:

$$\mathcal{L} = \partial_x + u, \quad \mathcal{A} = 3u^2 - u_{xx}, \quad (10.13)$$

для которой также равенство (1.11) эквивалентно уравнения КдФ (1.1). Однако, такой \mathcal{L} -оператор – преобразование подобия оператора ∂_x :

$$\mathcal{L} = \exp\left(-\int^x u(x)\right) \partial_x \exp\left(-\int^x u(x)\right),$$

где в отличие от рассмотренного ранее оператора K оператор преобразования является оператором умножения. Поэтому такой оператор \mathcal{L} имеет тривиальный спектр, не зависящий от $u(x)$, и соответственно, обратная задача для него не имеет смысла. Отметим, что такого рода бесполезные “пары Лакса” могут быть выписаны для любого уравнения в любом числе измерений. Поэтому, говоря об интегрируемых уравнениях, мы всегда будем иметь ввиду наличие для них лаксовой пары, в которой для оператора \mathcal{L} осмыслены прямая и обратная задачи.

10.3 Решения Йоста

Итак, мы на некоторое время опускаем явную зависимость от t и приступаем к исследованию спектральной задачи на всей оси $(-\infty < x < +\infty)$ для вещественного, $(u(x) \in \mathbb{R})$, непрерывного и убывающего при больших x ($u(x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty$) потенциала. Из стандартного курса квантовой механики известно, что непрерывный спектр уравнения (10.10) с оператором (1.12) (уравнение Шредингера, уравнение Штурма–Лиувилля) лежит на положительной полуоси $\lambda \geq 0$ спектрального параметра и является двукратно вырожденным. Мы рассматриваем класс потенциалов

$$\int dx |u(x)| (1 + |x|) < \infty, \quad (10.14)$$

причем, как и ранее, мы используем символ \int в смысле $\int_{-\infty}^{+\infty}$. В дальнейшем мы будем получать некоторые результаты и при более жестком условии на потенциал:

$$u(x) = O\left(\frac{1}{x^{2+\epsilon}}\right) \quad \text{для некоторого } \epsilon > 0. \quad (10.15)$$

Нам будет также удобно далее обозначать спектральный параметр $\lambda = k^2$ (т.е. $z = ik$), так что уравнение (10.10) приобретает вид

$$-y_{xx} + u(x)y = k^2y, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (10.16)$$

при этом именно k мы будем называть спектральным параметром.

Пусть $k \in \mathbb{R}$. Введем два специальных решения уравнения (10.16), задав их асимптотиками на отрицательной и положительной бесконечностях, соответственно:

$$\varphi_+(x, k) = e^{-ikx} + o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \quad (10.17)$$

$$\varphi_-(x, k) = e^{-ikx} + o(1), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (10.18)$$

Эти решения известны в литературе как **решения Йоста**. Ввиду вещественности потенциала $u(x)$ и параметра k комплексно сопряженные функции $\overline{\varphi}_+(x, k)$ и $\overline{\varphi}_-(x, k)$ также являются решениями уравнения (10.16). Причем в силу граничных условий (10.17), (10.18)

$$\overline{\varphi}_\pm(x, k) = \varphi_\pm(x, -k). \quad k \in \mathbb{R} \quad (10.19)$$

Чтобы убедиться в существовании всех введенных решений, заметим, что дифференциальное уравнение (10.16) совместно с граничными условиями (10.17) или (10.18), соответственно, эквивалентно интегральным уравнениям

$$\varphi_\pm(x, k) = e^{-ikx} + \int_{\mp\infty}^x dx' \frac{\sin k(x-x')}{k} u(x') \varphi_\pm(x', k). \quad (10.20)$$

Задача 13. Эти уравнения принадлежат классу Вольтерра, а потому однозначно разрешимы при условии (10.14) на потенциал. Введем вспомогательные функции

$$\chi_\pm(x, k) = e^{ikx} \varphi_\pm(x, k) \quad (10.21)$$

(сравните с символом $\tilde{K}(t, z)$, обсуждавшемся в предыдущих лекциях!), удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$-\chi_{\pm,xx}(x, k) + 2ik\chi_{\pm,x} + u(x)\chi_\pm = 0. \quad (10.22)$$

Тогда вместо (10.20) мы имеем

$$\chi_\pm(x, k) = 1 + \int_{\mp\infty}^x dx' \frac{e^{2ik(x-x')} - 1}{2ik} u(x') \chi_\pm(x', k). \quad (10.23)$$

Очевидно, что при равенство при верхнем (нижнем) знаке допускает аналитическое продолжение на верхнюю (нижнюю) полуплоскость $k \in \mathbb{C}$, $\text{Im}k \geq 0$ (соответственно, $k \in \mathbb{C}$, $\text{Im}k \leq 0$, поскольку экспоненты в подинтегральных выражениях в этих областях убывают. Свойства этих функций дают следующие леммы.

Лемма 10.1 (Фаддеев) *Существует такая константа K , что:*

$$|\chi_+(x, k) - 1| \leq K \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^x dx' |u(x')|, \quad \text{Im}k \geq 0 \quad (10.24)$$

$$|\chi_+(x, k) - 1| \leq K \int_{-\infty}^x dx' |x' u(x')|, \quad \text{Im}k \geq 0$$

$$|\partial_x \chi_+(x, k)| \leq K \int_{-\infty}^x dx' |u(x')|, \quad \text{Im}k \geq 0$$

Кроме того, функция $\chi_{+,k}(x, k)$ непрерывно дифференцируема по $k \in \mathbb{C}$, $\text{Im}k \geq 0$ за исключением, может быть, точки $k = 0$. При этом выполнена оценка:

$$|\partial_k \chi_+(x, k)| \leq \frac{K}{|k|}, \quad \text{Im}k \geq 0 \quad (10.25)$$

Лемма 10.2 *Существует*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \chi_+(x, k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy \chi_+(y, k) u(y) \quad (10.26)$$

Доказательство По предыдущей лемме $\chi_+(x, k)$ ограничена при всех $-\infty \leq x \leq +\infty$, $k \in \mathbb{C}$, $\text{Im}k \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2ikx} \int_{-\infty}^x dy e^{-2iky} \chi_+(y, k) u(y) = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-\infty}^x dy e^{-2iky} \chi_+(y, k) u(y)}{e^{-2ikx}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\chi_+(x, k) u(x)}{-2ik} = 0, \end{aligned}$$

что доказывает (10.26) в силу (10.23).

Задача 13 *Доказать, что уравнение (10.20) эквивалентно (10.16) и условию (10.17) или (10.18), соответственно.*

11 Лекция

11.1 Асимптотическое поведение решений Йоста по k .

Интегральные уравнения (10.23) позволяют уточнить указанное в Лемме 10.1 асимптотическое поведение по k . Действительно, как уже говорилось, слагаемые с экспонентами убывают, а потому по (10.24):

$$\chi_{\pm}(x, k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{\mp\infty}^x dx' u(x') + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \in \mathbb{C}, \quad \text{Im}k \gtrless 0. \quad (11.1)$$

Эти формулы позволяют восстановить потенциал $u(x)$ (точнее говоря, его первообразную) по известным решениям Йоста.

Укажем также обобщение на комплексный случай соотношений (10.19):

$$\overline{\varphi_{\pm}(x, k)} = \varphi_{\pm}(x, -\bar{k}), \quad \text{Im}k \gtrless 0, \quad (11.2)$$

что следует из указанных свойств аналитичности в соответствующих полуплоскостях. В частности отсюда следует, что при чисто мнимых $k = ip$, $\text{Im}p = 0$ решения Йоста вещественны:

$$\text{Im}\varphi_{\pm}(x, \pm ip) = 0, \quad p \geq 0 \quad (11.3)$$

11.2 Матрица монодромии

Пары решений $\varphi, \overline{\varphi}$ и $\varphi_-, \overline{\varphi_-}$ линейно независимы при вещественных k , отличных от нуля. Действительно, пусть

$$W(f, g) = fg_x - f_xg \quad (11.4)$$

означает вронскиан функций f и g . Обращение вронскиана в ноль эквивалентно пропорциональности функций f и g . Хорошо известно (Задача 14), что если f и g удовлетворяют уравнению (10.16), то

$$\partial_x W(f, g) = 0. \quad (11.5)$$

таким образом для вычисления значений вронскианов решений Йоста можно воспользоваться их асимптотическим поведением (10.17) и (10.18), что дает (Задача 15)

$$W(\varphi_+, \overline{\varphi_+}) = W(\varphi_-, \overline{\varphi_-}) = 2ik. \quad (11.6)$$

Итак при $k \neq 0$ решение φ_+ линейно независимо от $\overline{\varphi_+}$ и аналогично для пары $\varphi_-, \overline{\varphi_-}$. Поскольку уравнение (10.16), как и всякое уравнение второго порядка, может иметь не более двух линейно независимых решений, то каждая из этих пар образует полный набор. Таким образом существует постоянная (т.е. не зависящая от x) (**приведенная**) **матрица монодромии** $T(k)$ такая, что

$$\begin{pmatrix} \varphi_+(x, k) \\ \overline{\varphi_+}(x, k) \end{pmatrix} = T(k) \begin{pmatrix} \varphi_-(x, k) \\ \overline{\varphi_-}(x, k) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (11.7)$$

где

$$T(k) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ \bar{b}(k) & \bar{a}(k) \end{pmatrix}, \quad (11.8)$$

где мы учли, что вторая строка в (11.7) является комплексно сопряженной к первой. Отметим, что в соответствии с предыдущим обсуждением точку $k = 0$ мы в дальнейшем рассмотрим отдельно.

Первая строка равенства (11.7) имеет вид

$$\varphi_+(x, k) = a(k) \varphi_-(x, k) + b(k) \bar{\varphi}_-(x, k), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (11.9)$$

что ввиду (10.19), т.е. в силу вещественности потенциала $u(x)$, означает, выполнение соотношений

$$\bar{a}(k) = a(-k), \quad \bar{b}(k) = b(-k), \quad k \in \mathbb{R} \quad (11.10)$$

для элементов матрицы монодромии. Для того, чтобы найти явное выражение этих элементов через потенциалы и решения Йоста, запишем (10.20) как

$$\begin{aligned} \varphi_+(x, k) = & e^{-ikx} + \frac{e^{ikx}}{2ik} \int dx' e^{-ikx'} \varphi_+(x', k) u(x') - \\ & - \frac{e^{-ikx}}{2ik} \int dx' e^{ikx'} \varphi_+(x', k) u(x') - \\ & - \int_x^{+\infty} dx' \frac{\sin k(x-x')}{k} \varphi_+(x', k) u(x'). \end{aligned} \quad (11.11)$$

Тогда в силу (11.9)

$$\begin{aligned} a(k) \varphi_-(x, k) + b(k) \bar{\varphi}_-(x, k) = & e^{-ikx} \left(1 - \frac{1}{2ik} \int dx' e^{ikx'} \varphi_+(x', k) u(x') \right) + \\ & + \frac{e^{ikx}}{2ik} \int dx' e^{-ikx'} \varphi_+(x', k) u(x') + \\ & + a(k) (\varphi_-(x, k) - e^{-ikx}) + \\ & + b(k) (\bar{\varphi}_-(x, k) - e^{ikx}), \end{aligned}$$

так что

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy e^{iky} \varphi_+(y, k) u(y) \equiv 1 - \frac{1}{2ik} \int dy \chi_+(y, k) u(y) \quad (11.12)$$

и

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int dy e^{-iky} \varphi_+(y, k) u(y). \quad (11.13)$$

Ввиду доказанной ранее аналитичности χ_+ в области $\text{Im}k > 0$, видно, что и функция $a(k)$ также аналитична в верхней полуплоскости и задается равенством (11.12) при $\text{Im}k \geq 0$. Что касается функции $b(k)$, то она, вообще говоря, не продолжается с вещественной прямой $\text{Im}k = 0$. Для ее продолжимости в комплексную область следует потребовать, например, чтобы потенциал $u(x)$ убывал с ростом x быстрее любой линейной экспоненты, что сильно сужает класс рассматриваемых потенциалов, а потому мы не будем накладывать это условие.

Отметим, что в силу (10.24)

$$a(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{Im}k > 0 \quad (11.14)$$

а в силу (10.26)

$$a(k) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \chi_+(x, k) \quad (11.15)$$

Аналогично предыдущему можно получить при $\text{Im}k \geq 0$ представления

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy e^{-iky} \overline{\varphi}_-(y, k) u(y) = 1 - \frac{1}{2ik} \int dy \overline{\chi_-(y, \overline{k})} u(y), \quad (11.16)$$

где, в соответствии с предыдущим, функция $\overline{\varphi}_-(x, k)$ аналитична в верхней полуплоскости переменной k , поскольку $\overline{\varphi}_-(x, k) \equiv \overline{\varphi_-(x, \overline{k})}$ и аналогично $\overline{\chi}_-$. Кроме того:

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int dy e^{-iky} \varphi_-(y, k) u(y), \quad \text{Im}k = 0, \quad (11.17)$$

см. Задачу 16.

11.3 Свойства элементов матрицы монодромии.

Полученные выражения для функций $a(k)$ и $b(k)$ показывают, что в точке $k = 0$ обе они, вообще говоря, имеют полюсную особенность:

$$a(k) = \frac{ic}{k} + O(1), \quad b(k) = \frac{-ic}{k} + O(1), \quad k \rightarrow 0, \quad (11.18)$$

причем в силу (11.12) или (11.13)

$$c = \frac{1}{2} \int dy \varphi_+(y, 0) u(y), \quad (11.19)$$

что вещественно в силу вещественности потенциала и (10.19), т.е. опять-таки в силу вещественности потенциала. Тогда, мы видим, что соотношение (11.9) выполняется и в точке $k = 0$: предел правой части при $k \rightarrow 0$ существует по Лемме (10.1), а предел правой части существует опять же в силу этой Леммы, условия (10.19) и (11.18) и равен

$$\varphi_+(x, 0) = 2ic \varphi_{-,k}(x, 0) + \tilde{c} \varphi_-(x, 0), \quad (11.20)$$

где \tilde{c} — некоторая константа. По условию нормировки (10.18): $\varphi_{-,k}(x, 0) = -ix + O(1)$ при $x \rightarrow +\infty$. Таким образом равенство (11.18) имеет прозрачный смысл: решение, ограниченное на левом конце оси x -ов ($\varphi(x, 0) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow -\infty$), на правом конце представляет собой линейную комбинацию линейно растущего ($\varphi_{-,k}(x, 0)$) и ограниченного ($\varphi_-(x, 0)$) решений. Понятно, что для потенциалов общего положения $c \neq 0$. Если же выполнено условие $c = 0$, т.е. каждое решение ограниченное на левом конце остается ограниченным и на правом (легко убедиться, что это утверждение справедливо и в случае, если ‘левое’ и ‘правое’ поменять местами), называются **потенциалами с квазиуровнем при нулевой энергии**.

Предел малых u . В первом порядке по потенциалу u элемент $b(k)$ матрицы монодромии переходит в преобразование Фурье потенциала, как следует из (11.13):

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int dy e^{-2iky} u(y) + O(u^2) \quad (11.21)$$

Элементы a и b матрицы монодромии не независимы. Действительно, подставляя (11.9) в первое равенство в (11.6), мы в силу второго равенства получаем унимодулярность матрицы монодромии (Задача 17)

$$\det T(k) \equiv |a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (11.22)$$

Тогда обратная матрица $T(k)^{-1}$ равна

$$T(k)^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a}(k) & -b(k) \\ -\bar{b}(k) & a(k) \end{pmatrix} \quad (11.23)$$

а обращение равенства (11.9) имеет вид

$$\varphi_-(x, k) = \bar{a}(k)\varphi_+(x, k) - b(k)\overline{\varphi_+(x, k)}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (11.24)$$

Отметим также, что в силу, например, равенств (11.9) и (11.6) элементы матрицы монодромии также могут быть выражены посредством соответствующих вронскианов:

$$a(k) = \frac{W(\varphi_+(x, k), \overline{\varphi_-(x, k)})}{2ik}, \quad k \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} k \geq 0, \quad (11.25)$$

$$b(k) = \frac{W(\varphi_+(x, k), \varphi_-(x, k))}{-2ik}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (11.26)$$

Заметим, что равенство (11.25) дает еще одно доказательство аналитической продолжимости $a(k)$ в верхнюю полуплоскость. При этом, как обычно, мы понимаем $\overline{\varphi_-(x, k)}$ как аналитическое продолжение функции комплексно сопряженной к φ_- . Иными словами: $\overline{\varphi_-(x, k)} \equiv \overline{\varphi_-(x, \bar{k})}$.

Задача 14 Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции $x \in \mathbb{R}$.

1. Доказать, что для любых таких f и g , удовлетворяющих (10.16), выполнено (11.5).

2. Доказать, что для любых таких f и g , удовлетворяющих (11.5), найдется такая функция $u(x)$, что выполнено (10.16).

Задача 15 Доказать (11.6).

Задача 16 Доказать (11.16) и (11.17).

Задача 17 Доказать (11.22).

12 Лекция

12.1 Интерпретация в терминах данных рассеяния

Рассмотрим нестационарное уравнение Шредингера:

$$i\tilde{\varphi}_t = \mathcal{L}\tilde{\varphi}$$

Внимание! ‘Время’ t в этом уравнении не имеет никакого отношения к временной эволюции уравнения КдФ.

На пространственных бесконечностях решения этого уравнения имеют вид плоских волн: $\tilde{\varphi}(t, x, k) = e^{-i(\omega t \pm kx)} + o(1)$, где $\omega = k^2$. Верхний знак отвечает при $k > 0$ волне, движущейся справа налево, а нижний знак — слева направо. В то же время, учитывая (10.18) и (11.9) мы имеем при $x \rightarrow +\infty$:

$$\frac{\varphi_+(x, k)}{a(k)} = e^{-ikx} + \frac{b(k)}{a(k)}e^{ikx} + o(1),$$

где первое слагаемое является падающей, а второе — отраженной волнами. Именно для того, чтобы при падающей волне был единичный коэффициент, мы поделили φ_+ на a . Заметим, что терминология задачи рассеяния, конечно, возникла из рассмотрения радиальной части трехмерного уравнения Шредингера, что объясняет возникновение названий волн: действительно, падающей в таком случае является волна, приходящая с положительной бесконечности, т.е. из области бесконечно больших радиусов. Аналогично при $x \rightarrow -\infty$ получаем прошедшую волну:

$$\frac{\varphi_+(x, k)}{a(k)} = \frac{e^{-ikx}}{a(k)} + o(1).$$

Таким образом естественно ввести величины

$$t(k) = \frac{1}{a(k)}, \quad r(k) = \frac{b(k)}{a(k)}, \quad (12.1)$$

называемые, соответственно, **коэффициентами прохождения и отражения**. Введенные величины не независимы. В силу (11.22):

$$|t(k)|^2 + |r(k)|^2 = 1, \quad (12.2)$$

а в силу (11.10):

$$\bar{t}(k) = t(-k), \quad \bar{r}(k) = r(-k). \quad (12.3)$$

Выполнены, также, следующие свойства:

$$|r(k)| < 1, \quad k \neq 0, \quad (12.4)$$

$$r(k) = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad (12.5)$$

$$\int dx(1 + |x|)|B_x(x)| < \infty, \quad \text{где } B(x) = \int dk e^{ikx}b(k), \quad (12.6)$$

которые мы приводим здесь без доказательства. Отметим также, что в силу (11.22) и (12.1)

$$|a(k)|^2 = \frac{1}{1 - |r(k)|^2} \quad (12.7)$$

12.2 Целое решение уравнения Штурма–Лиувилля

Введем еще одно решение уравнения Штурма–Лиувилля, полезное при построении функции Грина этого уравнения. Пусть $s(x, y, k)$ удовлетворяет по x уравнению (10.16) и задано граничными условиями в точке $x = y$:

$$\begin{aligned} s(x, x, k) &= 0, \\ s_x(x, y, k) \Big|_{x=y} &= 1. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Это решение задается интегральным уравнением

$$s(x, y, k) = \frac{\sin k(x-y)}{k} + \int_y^x dx' \frac{\sin k(x-x')}{k} u(x') s(x', y, k) \quad (12.9)$$

и, как легко видеть, определяет целую функцию k при всех $k \in \mathbb{C}$. В силу этого уравнения

$$s(x, y, -k) = s(x, y, k), \quad k \in \mathbb{C}, \quad (12.10)$$

$$\overline{s(x, y, k)} = s(x, y, \bar{k}), \quad (12.11)$$

т.е. функция $s(x, y, k)$ вещественна при вещественном k .

Легко также проверить (Задача 18), что в силу равенств (11.9), (11.6), (11.25), (11.26) и (11.24) выполнены следующие представления:

$$s(x, y, k) = \begin{cases} \frac{\varphi_+(x, k)\overline{\varphi_-(y, k)} - \varphi_+(y, k)\overline{\varphi_-(x, k)}}{-2ika(k)}, & \text{при } \operatorname{Im}k \geq 0, \\ \frac{\overline{\varphi_+(x, k)}\varphi_-(y, k) - \overline{\varphi_+(y, k)}\varphi_-(x, k)}{2ik\bar{a}(k)}, & \text{при } \operatorname{Im}k \leq 0, \\ \frac{\varphi_+(x, k)\overline{\varphi_+(y, k)} - \varphi_+(y, k)\overline{\varphi_+(x, k)}}{-2ik}, & \text{при } k \in \mathbb{R}, \\ \frac{\varphi_-(x, k)\overline{\varphi_-(y, k)} - \varphi_-(y, k)\overline{\varphi_-(x, k)}}{-2ik}, & \text{при } k \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (12.12)$$

Для доказательства, например, первого равенства выберем k в верхней полуплоскости. В силу (11.25) полный набор линейно-независимых решений уравнения (10.16) в этом случае есть $\varphi_+(x, k)$ и $\overline{\varphi_-(x, k)}$. Поскольку $s(x, y, k)$ также удовлетворяет (по x) уравнению Штурма–Лиувилля, то найдутся такие, независимые от x , функции $\alpha(y, k)$, $\beta(y, k)$, что

$$s(x, y, k) = \varphi_+(x, k)\alpha(y, k) + \overline{\varphi_-(x, k)}\beta(y, k).$$

Тогда получаем равенства

$$\varphi_+(x, k)\alpha(x, k) + \overline{\varphi_-(x, k)}\beta(x, k) = 0,$$

$$\varphi_{+,x}(x, k)\alpha(x, k) + \overline{\varphi_{-,x}(x, k)}\beta(x, k) = 1,$$

откуда

$$\alpha(y, k) = \frac{-\overline{\varphi_-(y, k)}}{W[\varphi_+(y, k), \overline{\varphi_-(y, k)}]}, \quad \beta(y, k) = \frac{\varphi_+(y, k)}{W[\varphi_+(y, k), \overline{\varphi_-(y, k)}]}$$

Теперь первое равенство в (12.12) следует из (11.25). Остальные равенства доказываются аналогично, либо следуют из (11.9) и (11.24). Заметим, что попутно мы доказали, что $s(x, y, k)$ удовлетворяет (10.16) по переменной y .

С помощью решения $s(x, y, k)$ строится функция Грина уравнения (10.16):

$$G(x, y, k) = -\theta(x - y)s(x, y, k), \quad (12.13)$$

поскольку, как следует из (10.16)

$$(\mathcal{L} - k^2)G(x, y, k) = \delta(x - y). \quad (12.14)$$

С помощью функции Грина любое решение $f(x)$ неоднородного уравнения

$$(\mathcal{L} - k^2)f(x) = g(x) \quad (12.15)$$

записывается в виде

$$f(x) = f_0(x) + \int dx' G(x, x', k)g(x'), \quad (12.16)$$

где $f_0(x)$ – решение однородного уравнения и предполагается, что интеграл по x' сходится. В частности, пусть $\tilde{\varphi}_+(x, k)$ – решение Йоста, заданное условием (10.17) и отвечающее некоторому новому потенциалу \tilde{u} . Тогда интегральное уравнение для него можно записать как задачу рассеяния на фоне исходного потенциала u :

$$\tilde{\varphi}_+(x, k) = \varphi_+(x, k) + \int_{-\infty}^x dy s(x, y, k) (\tilde{u}(y) - u(y)) \tilde{\varphi}_+(y, k). \quad (12.17)$$

Отсюда следует, в частности, выражение для вариационных производных функций Йоста:

$$\frac{\delta\varphi_+(x, k)}{\delta u(y)} = s(x, y, k)\varphi_+(y, k)\theta(x - y), \quad (12.18)$$

$$\frac{\delta\varphi_-(x, k)}{\delta u(y)} = -s(x, y, k)\varphi_-(y, k)\theta(y - x), \quad (12.19)$$

где второе равенство выведено аналогично.

12.3 Дискретный спектр

Рассмотрим дискретный спектр:

$$\mathcal{L} y_n(x) = \lambda_n y_n(x), \quad (12.20)$$

где $y_n(x) \not\equiv 0$ и $y_n(x) \in \mathcal{L}_2$:

$$\int dx |y_n(x)|^2 < \infty \quad (12.21)$$

Поскольку оператор \mathcal{L} – самосопряженный, то все собственные значения вещественны. Действительно,

$$\lambda_n \int dx |y_n(x)|^2 = \int dx \overline{y_n(x)} \mathcal{L} y_n(x) = \bar{\lambda}_n \int dx |y_n(x)|^2,$$

так что

$$\lambda_n = \bar{\lambda}_n. \quad (12.22)$$

Предположим, что $\lambda_n = k^2 \geq 0$. Тогда, как мы знаем, решения осциллируют на бесконечности как $\sim e^{ikx}$ (или имеют линейное поведение при $k = 0$), а тем самым не принадлежат \mathcal{L}_2 . Итак

$$\lambda_n = -\kappa_n^2, \quad (12.23)$$

причем для определенности будем считать, что

$$\kappa_n > 0. \quad (12.24)$$

Пусть $p \in \mathbb{R}$ и пусть $p > 0$. Как мы знаем:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi_+(x, ip) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_-(x, -ip) = 0. \quad (12.25)$$

На противоположных бесконечностях:

$$\varphi_+(x, ip) = a(ip)e^{px} + o(e^{px}), \quad p > 0, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (12.26)$$

$$\varphi_-(x, -ip) = a(ip)e^{-px} + o(e^{-px}), \quad p > 0, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (12.27)$$

Итак, для убывания одного из этих решений (а тогда и обоих) на обоих бесконечностях необходимо, чтобы

$$a(i\kappa_n) = 0. \quad (12.28)$$

Введем обозначения:

$$\varphi_{+,n}(x) = \varphi_+(x, i\kappa_n), \quad \varphi_{-,n}(x) = \overline{\varphi_-}(x, i\kappa_n) = \varphi_-(x, -i\kappa_n). \quad (12.29)$$

Ввиду (12.28) это означает, что эти решения пропорциональны друг другу, т.е. существуют такие константы b_n , что

$$\varphi_{+,n}(x) = b_n \varphi_{-,n}(x), \quad (12.30)$$

причем в силу вещественности решений, эти константы также вещественны. Теперь в силу (12.30) мы видим, что условие (12.28) также и достаточно, чтобы $\varphi_{+,n}(x)$ или $\varphi_{-,n}(x)$ были собственными функциями, поскольку они стремятся к нулю на противоположных бесконечностях:

$$\varphi_{+,n}(x) = \begin{cases} b_n e^{-\kappa_n x}, & x \rightarrow +\infty \\ e^{\kappa_n x}, & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (12.31)$$

Равенство (12.28) определяет κ_n как условие существования убывающего решения уравнения

$$(\mathcal{L} + \kappa_n^2) \varphi_{+,n}(x) = 0. \quad (12.32)$$

Задача 18 Доказать (12.12).

13 Лекция.

13.1 Простота нулей $a(k)$

Покажем, что нули $a(k)$ простые. Продифференцируем для этого по k уравнение Штурма–Лиувилля на решение Йоста. Тогда

$$(\mathcal{L} + \kappa_n^2) \varphi_{+,k}(x, i\kappa_n) = 2i\kappa_n \varphi_+(x, i\kappa_n). \quad (13.1)$$

В силу (10.21) и (11.15) мы имеем асимптотическое поведение

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ikx} \varphi_+(x, k) = a(k), \quad \text{Im}k > 0, \quad (13.2)$$

так что

$$\varphi_{+,k}(x, i\kappa_n) = a'(i\kappa_n) e^{\kappa_n x} + o(e^{\kappa_n x}), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (13.3)$$

хотя, строго говоря, эту асимптотику следует выводить из (11.11), чтобы избежать предположения о дифференцируемости асимптотики (13.2). Теперь, перебрасывая в силу (13.2) и (13.3) производные, получаем

$$\int dx \varphi_+(x, i\kappa_n) \partial_x^2 \varphi_{+,k}(x, i\kappa_n) = 2b_n \kappa_n a'(i\kappa_n) + \int dx \varphi_{+,k}(x, i\kappa_n) \partial_x^2 \varphi_+(x, i\kappa_n),$$

так что по (13.1)

$$\int dx \varphi_+(x, i\kappa_n) (\mathcal{L} + \kappa_n^2) \varphi_{+,k}(x, i\kappa_n) = -2\kappa_n a'(i\kappa_n) b_n.$$

Тогда

$$\int dx \varphi_+(x, i\kappa_n)^2 = ia'(i\kappa_n) b_n.$$

Левая часть этого равенства положительна, так что $\text{Im}(ia'(i\kappa_n)) = 0$ и

$$a'(i\kappa_n) \neq 0, \quad (13.4)$$

причем

$$\text{sgn}(ia'(i\kappa_n)) = \text{sgn} b_n. \quad (13.5)$$

Отсюда следует, в частности, что $s(x, y, k)$ не имеет особенностей при $k = i\kappa_n$.

13.2 Дисперсионное соотношение.

Введем функцию

$$a_1(k) = a(k) \prod_{n=1}^N \frac{k + i\kappa_n}{k - i\kappa_n}, \quad (13.6)$$

Для $k \in \mathbb{R}$: $|a_1(k)| = |a(k)|$. Эта функция продолжается в верхнюю полуплоскость по переменной k и по доказанному ранее, не имеет там нулей. Поэтому функция $\ln a_1(k)$ аналитична в $\text{Im}k > 0$, и убывает на бесконечности: $\ln a_1(k) \rightarrow 0$, $|k| \rightarrow \infty$. Тогда в силу леммы Жордана для любого k в нижней полуплоскости, $\text{Im}k < 0$, выполняется тождественно

$$\int dk' \frac{\ln a_1(k')}{k' - k} = 0,$$

так что в пределе $\text{Im}k \rightarrow -0$, получаем:

$$\int dk' \frac{\ln a_1(k')}{k' - k + i0} = 0. \quad (13.7)$$

Далее, как известно

$$\ln a_1(k) = \ln |a_1(k)| + i \arg a_1(k), \quad (13.8)$$

а также имеется формула Сохоцкого–Вейрштрассе:

$$\frac{1}{k \pm i0} = \wp \frac{1}{k} \mp i\delta(k), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (13.9)$$

где использованы стандартные обозначения для обобщенных функций вещественной переменной k : $\frac{1}{k \pm i0}$ как предела из верхней/нижней полуплоскости, $\wp \frac{1}{k}$ в смысле главного значения и дельта функции $\delta(k)$. Поэтому вещественная часть тождества (13.7) дает

$$\arg a_1(k) = -\frac{1}{\pi} \wp \int dk' \frac{\ln |a_1(k')|}{k' - k}.$$

Таким образом:

$$a_1(k) = \exp \left\{ \ln |a(k)| - \frac{i}{\pi} \wp \int dk' \frac{\ln |a(k')|}{k' - k} \right\},$$

что можно переписать в виде

$$a_1(k) = \exp \left\{ -\frac{i}{\pi} \int dk' \ln |a(k')| \left(\wp \frac{1}{k' - k} + i\pi\delta(k' - k) \right) \right\},$$

т.е. в силу (13.9) как

$$a_1(k) = \exp \left\{ \frac{-i}{\pi} \int dk' \frac{\ln |a(k')|}{k' - k - i0} \right\}.$$

Значит, по (12.7),

$$a(k) = \prod_{n=1}^N \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} \exp \left(\frac{i}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k' - k - i0} \right), \quad \text{Im}k = 0, \quad (13.10)$$

или

$$a(k) = \prod_{n=1}^N \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} \exp \left(\frac{i}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k' - k} \right), \quad \text{Im}k > 0. \quad (13.11)$$

Итак, $a(k)$ восстанавливается по $|r(k)|$ и набору $\kappa_1, \dots, \kappa_N$. Теперь и $b(k)$ можно тоже восстановить по $r(k)$ и набору $\kappa_1, \dots, \kappa_N$:

$$b(k) = r(k)a(k). \quad (13.12)$$

Из дисперсионного соотношения следует много полезных фактов. Например, что эта функция вещественна при чисто мнимых значениях аргумента, $\text{Im}(a(ip)) = 0$, поскольку

$$a(ip) = \prod_{n=1}^N \frac{p - \kappa_n}{p + \kappa_n} \exp \left\{ \frac{p}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k'^2 + p^2} \right\}, \quad p > 0. \quad (13.13)$$

Удобно упорядочить собственные значения уравнения (12.20) так, чтобы

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N, \quad (13.14)$$

так что по (12.23):

$$\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_N. \quad (13.15)$$

Тогда из (13.13) имеем :

$$\text{sgn } a(ip) = \begin{cases} +1, & p > \kappa_1, \\ (-1)^n, & \kappa_n > p > \kappa_{n+1}, \quad n = 1, \dots, N-1, \\ (-1)^N, & \kappa_N > p. \end{cases} \quad (13.16)$$

Более того, для производной получаем, что

$$ia'(i\kappa_n) = \frac{1}{2\kappa_n} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \frac{\kappa_n - \kappa_m}{\kappa_n + \kappa_m} \exp \left\{ \frac{\kappa_n}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k'^2 + \kappa_n^2} \right\}, \quad (13.17)$$

так что

$$\text{sgn}(ia'(i\kappa_n)) = (-1)^n, \quad (13.18)$$

а тогда по (13.5) и

$$b_n = (-1)^{n-1} |b_n|. \quad (13.19)$$

Точно также, по (11.19) получаем, что

$$c = (-1)^N |c|. \quad (13.20)$$

13.3 “Явные” формулы для κ_n и b_n .

Равенства (11.12), (11.13) и (11.16), (11.17) можно рассматривать как нелинейное обобщение преобразования Фурье потенциала $u(x)$, где вместо экспонент e^{-ikx} выступают решения Йоста, которые, естественно, определяются тем же потенциалом $u(x)$. Аналоги таких соотношений имеются и для дискретных степеней свободы. Так, ввиду (11.12) и (11.16), равенство (12.28) означает, что κ_n можно определить как решения уравнения

$$2\kappa_n = - \int dy e^{-\kappa_n y} \varphi_{+,n}(y) u(y), \quad (13.21a)$$

$$\text{или } 2\kappa_n = - \frac{1}{2\kappa_n} \int dy e^{\kappa_n y} \varphi_{-,n}(y) u(y), \quad (13.21b)$$

а значения решений Йоста в этих точках (см. (12.29)) даются как решения интегральных уравнений, которые вытекают из (10.20):

$$\varphi_{+,n}(x) = e^{\kappa_n x} + \int_{-\infty}^x dy \frac{\text{sh } \kappa_n(x-y)}{\kappa_n} u(y) \varphi_{+,n}(y), \quad (13.22a)$$

$$\varphi_{-,n}(x) = e^{-\kappa_n x} - \int_x^{\infty} dy \frac{\text{sh } \kappa_n(x-y)}{\kappa_n} u(y) \varphi_{-,n}(y). \quad (13.22b)$$

Первое равенство здесь можно записать как

$$\varphi_{+,n}(x) = - \int dy \frac{e^{\kappa_n(x-y)}}{2\kappa_n} u(y) \varphi_{+,n}(y) + \int_{-\infty}^x dy \frac{e^{\kappa_n(x-y)} - e^{-\kappa_n(x-y)}}{2\kappa_n} u(y) \varphi_{+,n}(y),$$

а потому в силу (13.21) эти значения решений Йоста являются также решениями однородных интегральных уравнений:

$$\varphi_{+,n}(x) = - \int dy \frac{e^{-\kappa_n|x-y|}}{2\kappa_n} u(y) \varphi_{+,n}(y), \quad \varphi_{-,n}(x) = - \int dy \frac{e^{-\kappa_n|x-y|}}{2\kappa_n} u(y) \varphi_{-,n}(y), \quad (13.23)$$

где второе равенство выводится аналогично. Далее, сравнивая интегральные уравнения (13.22), легко получить (Задача 19), что коэффициент b_n в (12.30) равен

$$b_n = \frac{-1}{2\kappa_n} \int dy e^{\kappa_n y} u(y) \varphi_{+,n}(y). \quad (13.24)$$

Заметим, что это значение совпадает с формальным продолжением выражения (11.13) в точку $k = i\kappa_n$. Однако, такое продолжение существует лишь для узкого класса потенциалов, например, убывающих на бесконечности быстрее любой линейной экспоненты. В общем же случае потенциалов, удовлетворяющих (10.14) или (10.15), такое продолжение не существует.

13.4 Спектральные данные.

Введем вместо b_n новые переменные

$$\beta_n = \frac{b_n}{ia'(i\kappa_n)} > 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (13.25)$$

которые удобны тем, что в силу (13.5) они положительны. В качестве спектральных данных мы выбираем

$$S = \{r(k), \kappa_n, \beta_n, n = 1, \dots, N\}. \quad (13.26)$$

Потенциалы, которым отвечает нулевой коэффициент прохождения:

$$r(k) \equiv 0, \quad (13.27)$$

называются **безотражательными**.

Как мы видели ранее, по данным рассеяния однозначно восстанавливаются элементы матрицы монодромии $a(k)$, $b(k) = a(k)r(k)$ и $b_n = i\beta_n a'(i\kappa_n)$. Покажем, что по ним также однозначно восстанавливается и потенциал.

Задача 19 Доказать (13.24).

14 Лекция.

14.1 Обратная задача: задача Римана–Гильберта

Задача Римана–Гильберта – задача восстановления функции аналитической вне и внутри некоторого контура по линейному уравнению на ее предельные значения на контуре и нормировке на бесконечности. Покажем, что обратная задача, т.е. задача восстановления потенциала в уравнении Штурма–Лиувилля по данным рассеяния, является специальным случаем задачи Римана–Гильберта. В силу (10.21) перепишем (11.9) в виде

$$\frac{\chi_+(x, k)}{a(k)} = \chi_-(x, k) + r(k)\overline{\chi}_-(x, k)e^{2ikx}. \quad (14.1)$$

Введем функцию комплексного переменного

$$X(x, k) = \begin{cases} \frac{\chi_+(x, k)}{a(k)}, & \text{Im}k > 0 \\ \chi_-(x, k), & \text{Im}k < 0 \end{cases}, \quad (14.2)$$

и пусть $X_{\pm}(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow \pm 0} X(k + i\epsilon)$, где $k \in \mathbb{R}$. Функция $X(k)$ аналитична в нижней полуплоскости, мероморфна в верхней и имеет там полюса в точках $k = i\kappa_n$, $n = 1, \dots, N$. Введем

$$\gamma_n(x) = -ie^{\kappa_n x} \operatorname{res}_{k=i\kappa_n} X(x, k), \quad (14.3)$$

что по (10.21) и (14.2) дает

$$\gamma_n(x) = \frac{\chi_+(x, i\kappa_n)e^{\kappa_n x}}{ia'(i\kappa_n)} \equiv \frac{\varphi_+(x, i\kappa_n)}{ia'(i\kappa_n)}. \quad (14.4)$$

На вещественной оси эта функция, как следует из (14.1), имеет разрыв:

$$X_+(x, k) - X_-(x, k) = r(k)\overline{X}_-(x, k)e^{2ikx}, \quad \text{Im}k = 0. \quad (14.5)$$

Чтобы удалить полюсные особенности, рассмотрим

$$\tilde{X}(x, k) = X(x, k) - i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x)e^{-\kappa_n x}}{k - i\kappa_n}. \quad (14.6)$$

Эта функция аналитична в верхней и нижней полуплоскостях и имеет тот же разрыв на вещественной оси, что и (14.5):

$$\tilde{X}_+(x, k) - \tilde{X}_-(x, k) = r(k)\overline{\tilde{X}}_-(x, k)e^{2ikx}, \quad \text{Im}k = 0. \quad (14.7)$$

Кроме того в силу (11.1), (11.14) и (14.1) выполнено асимптотическое поведение

$$\tilde{X}(x, k) \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty. \quad (14.8)$$

Тогда по формуле Лиувилля

$$\tilde{X}(x, k) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{\tilde{X}_+(x, k') - \tilde{X}_-(x, k')}{k' - k}, \quad (14.9)$$

так что по (14.6)

$$X(x, k) = 1 + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x) e^{-\kappa_n x}}{k - i\kappa_n} + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k') \bar{X}_-(x, k') e^{2ik'x}}{k' - k}, \quad \text{Im}k \neq 0. \quad (14.10)$$

Переходя к пределам на вещественной оси, получаем уравнения

$$\frac{\chi_+(x, k)}{a(k)} = 1 + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x) e^{-\kappa_n x}}{k - i\kappa_n} + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k') \bar{X}_-(x, k') e^{2ik'x}}{k' - k - i0}, \quad \text{Im}k = 0 \quad (14.11)$$

и

$$\chi_-(x, k) = 1 + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x) e^{-\kappa_n x}}{k - i\kappa_n} + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k') \bar{X}_-(x, k') e^{2ik'x}}{k' - k + i0}, \quad \text{Im}k = 0. \quad (14.12)$$

Перейдем к решениям Йоста. Тогда вместо (14.11) мы имеем при $\text{Im}k = 0$

$$\frac{\varphi_+(x, k)}{a(k)} = e^{-ikx} + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x) e^{i(\kappa_n - k)x}}{k - i\kappa_n} + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k') e^{i(k' - k)x} \bar{\varphi}_-(x, k')}{k' - k - i0}, \quad (14.13)$$

а вместо (14.12)

$$\varphi_-(x, k) = e^{-ikx} + i \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n(x) e^{-i(k - i\kappa_n)x}}{k - i\kappa_n} + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k') e^{i(k' - k)x} \bar{\varphi}_-(x, k')}{k' - k + i0}. \quad (14.14)$$

Первое из них определяет $\varphi_+(x, k)$, если известны $\varphi_-(x, k)$ и $\gamma_n(x)$. Для того, чтобы второе равенство превратилось в интегральное уравнение на $\varphi_-(x, k)$, воспользуемся (14.4), которое в силу (13.25) и (12.30) дается в виде

$$\gamma_n(x) = \beta_n \varphi_-(x, -i\kappa_n). \quad (14.15)$$

Иными словами мы связали вычеты в полюсах функции X в верхней полуплоскости с ее значениями в нижней. Продолжая (14.14) в нижнюю полуплоскость, мы получаем по (14.15)

$$\gamma_n(x) = \beta_n \left\{ e^{-\kappa_n x} - \sum_{m=1}^N \frac{\gamma_m(x) e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x}}{\kappa_n + \kappa_m} + \frac{1}{2\pi i} \int dk' \frac{r(k') e^{i(k' + i\kappa_n)x} \bar{\varphi}_-(x, k')}{k' + i\kappa_n} \right\}, \quad (14.16)$$

что вместе с (14.14) дает уже замкнутую систему **уравнений обратной задачи** для функции $\varphi_-(x, k)$. Можно доказать однозначную разрешимость этих уравнений в выбранном классе спектральных данных. Тогда потенциал $u(x)$ восстанавливается по (11.1):

$$u(x) = \partial_x \left\{ 2 \sum_{n=1}^N \gamma_n(x) e^{-\kappa_n x} + \frac{1}{\pi} \int dk' r(k') e^{ik'x} \bar{\varphi}_-(x, k') \right\}. \quad (14.17)$$

14.2 Временная эволюция.

Итак, мы разобрали прямую задачу (левая стрелка вниз на диаграмме 10.2). Теперь, наконец, нам предстоит разобрать временную эволюцию данных рассеяния (нижняя горизонтальная стрелка на диаграмме 10.2), эквивалентную тому, что $u(x)$ зависит от t в силу уравнения (1.1). Последнее, как мы видели, эквивалентно выполнению представления Лакса (1.11), где оператор M определен в (1.13). Тогда, ввиду (10.11) и асимптотических условий (10.17) и (10.18), получаем:

$$\varphi_{+,t}(x, k) + \mathcal{A}\varphi_+(x, k) = 4ik^3 \varphi_+(x, k), \quad (14.18)$$

$$\varphi_{-,t}(x, k) + \mathcal{A}\varphi_-(x, k) = 4ik^3 \varphi_-(x, k), \quad (14.19)$$

где $k \in \mathbb{R}$, но оба равенства допускают продолжения в соответствующие полуплоскости спектрального параметра. Далее, по (11.9), (14.18) и (14.19) находим, что

$$a_t(k) \varphi_-(x, k) + b_t(k) \overline{\varphi}_-(x, k) = 8ik^3 b(k) \overline{\varphi}_-(x, k), \quad k \in \mathbb{R},$$

что ввиду линейной независимости $\varphi_-(x, k)$ и $\overline{\varphi}_-(x, k)$ при $k \neq 0$ дает эволюцию элементов матрицы монодромии:

$$a_t(k) = 0, \quad (14.20)$$

$$b_t(k) = 8ik^3 b(k) \quad (14.21)$$

при $k \in \mathbb{R}$. Однако, ввиду того, что $a(k)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость k , равенство (14.20) выполняется также и при всех $k \in \mathbb{C}$, $\text{Im}k \geq 0$. Таким образом функция $a(k)$ есть порождающий функционал интегралов движения, которыми будут, например, все коэффициенты ее ряда Тейлора, или значения в различных точках этой полуплоскости. В частности, не зависят от времени и положения нулей этой функции, т.е.

$$\partial_t \kappa_n = 0. \quad (14.22)$$

Далее, из (12.30) и аналитических продолжений равенств (14.18) и (14.19) в соответствующие полуплоскости, следует, что

$$\partial_t b_n = 8\kappa_n^3 b_n. \quad (14.23)$$

Суммируя, для временной эволюции спектральных данных получаем:

$$r_t(k) = 8ik^3 r(k) \quad (14.24)$$

и

$$\partial_t \beta_n = 8\kappa_n^3 \beta_n. \quad (14.25)$$

Итак, при t отличном от нуля спектральные данные суть

$$S(t) = \left\{ e^{8ik^3 t} r(k), \quad \kappa_n, \quad e^{8\kappa_n^3 t} \beta_n \right\}. \quad (14.26)$$

Отметим, что в силу (14.24) и (14.22):

$$\partial_t |r(k)| = 0, \quad (14.27)$$

откуда следует (14.20) в силу (13.10).

Подставляя данные рассеяния (14.26) в уравнения обратной задачи, мы находим решение Йоста $\varphi_-(t, x, k)$, отвечающее моменту t и, очевидно, совпадающее с исходным $\varphi_-(x, k)$ при $t = 0$. Так построенное решение Йоста удовлетворяет уравнению (14.19), однако проверка этого факта достаточно громоздка и мы ее здесь опускаем. А отсюда уже следует, что потенциал $u(t, x)$, восстановленный по (14.17), решает задачу Коши для уравнения КдФ. Итак, мы замкнули диаграмму 10.2, сведя решение нелинейной задачи к последовательному решению трех линейных задач, одна из которых решается явно. В этом и состоит общая схема метода обратной задачи рассеяния.

Задача 20 * *Имеем систему уравнений (14.14) и (14.15). Рассмотрим предел этой системы при $\kappa_{l+1} = \kappa_l$ для некоторого $l \in [1, N - 1]$. Показать, что в этом пределе данная система сводится к такой же системе с заменой $N \rightarrow N - 1$, т.е., что вырождения собственного значения при $k = ik_l$ не возникает.*

15 Лекция.

15.1 Вывод уравнения Штурма–Лиувилля из уравнений обратной задачи.

Мы показали, что решение Йоста $\varphi_-(x, k)$ уравнения Штурма–Лиувилля удовлетворяет системе уравнений (14.14) и (14.16). Докажем теперь обратное утверждение: решение $\varphi_-(x, k)$ уравнений (14.14) и (14.16) удовлетворяет уравнению Штурма–Лиувилля с потенциалом, заданным по (14.17). Для этого продифференцируем указанные уравнения:

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + k^2) \varphi_-(x, k) &= i \sum_n e^{-i(k-i\kappa_n)x} \left\{ \frac{(\partial_x^2 - \kappa_n^2) \gamma_n(x)}{k - i\kappa_n} - 2i \partial_x \gamma_n(x) + 2i \kappa_n(x) \gamma_n \right\} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int dk' r(k') e^{i(k'-k)x} \left\{ \frac{(\partial_x^2 + k'^2) \overline{\varphi}_-(x, k')}{k' - k + i0} + \right. \\ &\left. + 2i \partial_x \overline{\varphi}_-(x, k') - 2k' \overline{\varphi}_-(x, k') \right\}, \\ (\partial_x^2 - \kappa_n^2) \gamma_n(x) &= -\beta_n \sum_m e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x} \left\{ \frac{(\partial_x^2 - \kappa_m^2) \gamma_m(x)}{\kappa_n + \kappa_m} - 2 \partial_x \gamma_m(x) + 2 \kappa_m \gamma_m(x) \right\} + \\ &+ \frac{\beta_n}{2\pi i} \int dk' r(k') e^{i(k'+i\kappa_n)x} \left\{ \frac{(\partial_x^2 + k'^2) \overline{\varphi}_-(x, k')}{k' + i\kappa_n} + \right. \\ &\left. + 2i \partial_x \overline{\varphi}_-(x, k') - 2k' \overline{\varphi}_-(x, k') \right\}, \end{aligned}$$

что в силу (14.17) можно переписать как

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + k^2) \varphi_-(x, k) &= e^{-ikx} u(x) + i \sum_n e^{-i(k-i\kappa_n)x} \frac{(\partial_x^2 - \kappa_n^2) \gamma_n(x)}{k - i\kappa_n} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int dk' r(k') e^{i(k'-k)x} \frac{(\partial_x^2 + k'^2) \overline{\varphi}_-(x, k')}{k' - k + i0}, \\ (\partial_x^2 - \kappa_n^2) \gamma_n(x) &= \beta_n \left\{ e^{-\kappa_n x} u(x) - \sum_m e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x} \frac{(\partial_x^2 - \kappa_m^2) \gamma_m(x)}{\kappa_n + \kappa_m} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2\pi i} \int dk' r(k') e^{i(k'+i\kappa_n)x} \frac{(\partial_x^2 + k'^2) \overline{\varphi}_-(x, k')}{k' + i\kappa_n} \right\}. \end{aligned}$$

Итак мы видим, что функции $(\partial_x^2 + k^2) \varphi_-(x, k)$ и $(\partial_x^2 - \kappa_n^2) \gamma_n(x)$ удовлетворяют уравнениям с тем же ядрами, что и функции $\varphi_-(x, k)$ и $\gamma_n(x)$, т.е. (14.14) и (14.16), но с неоднородными членами умноженными на $u(x)$. В силу однозначной разрешимости системы (14.14), (14.16), а также учитывая, что переменная x входит в ядра этой системы как параметр, получаем:

$$(\partial_x^2 + k^2) \varphi_-(x, k) = u(x) \varphi_-(x, k), \quad (\partial_x^2 - \kappa_n^2) \gamma_n(x) = u(x) \gamma_n(x). \quad (15.1)$$

Отметим, что равенство $(\partial_x^2 + k^2) \varphi_+(x, k) = u(x) \varphi_+(x, k)$ можно вывести аналогично, либо с помощью (14.13).

15.2 Интегралы движения.

Локальными полиномиальными интегралами движения называются выражения вида

$$I_n = \int P_n(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_x^{(m)}) dx, \quad (15.2)$$

где P_n – полином n -ой степени от своих аргументов. Покажем, что уравнение КдФ обладает бесконечным набором таких, функционально независимых, интегралов. Поражающим функционалом таких интегралов является функция $a(k)$, которая, как было показано, не зависит от времени. В окрестности особенности по k спектральной задачи, т.е. на бесконечности в данном случае, коэффициенты ее асимптотического разложения могут быть вычислены. Для демонстрации этого, выберем k в верхней полуплоскости и достаточно большим: таким, что $\varphi_+(x, k)$ не обращается в нуль (ввиду асимптотических свойств решения Йоста такое всегда возможно). Введем вместо $\varphi_+(x, k)$ новую функцию $\zeta(x, k)$ равенством

$$\varphi_+(x, k) = \exp \left\{ -ikx + \int_{-\infty}^x dx' \zeta(x', k) \right\}, \quad \text{Im} k > 0. \quad (15.3)$$

В силу условия на k правая часть не имеет нулей, а потому ζ хорошо определена и не имеет особенностей в указанной области. В силу (11.15) имеем

$$\ln a(k) = \int dx \zeta(x, k), \quad (15.4)$$

а по (10.10) эта функция удовлетворяет уравнению Рикатти:

$$\zeta_x + \zeta^2 - u - 2ik\zeta = 0. \quad (15.5)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде асимптотического ряда при $k \rightarrow \infty$

$$\zeta(x, k) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\zeta_j(x)}{(2ik)^j}, \quad k \in \mathbb{C}, \quad \text{Im} k > 0. \quad (15.6)$$

Легко видеть, что

$$\zeta_1(x) = -u(x), \quad (15.7)$$

и приравнивая коэффициенты при старших степенях, получаем рекуррентные соотношения:

$$\zeta_{j+1}(x) = \partial_x \zeta_j(x) + \sum_{k=1}^{j-1} \zeta_k(x) \zeta_{j-k}(x), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (15.8)$$

что показывает, что все коэффициенты $\zeta_j(x)$, последовательно определяемые по (15.8), действительно являются полиномами, локальными по u и ее производным. Для младших коэффициентов мы имеем:

$$\zeta_2(x) = -u_x, \quad \zeta_3(x) = -u_{xx} + u^2, \quad (15.9)$$

$$\zeta_4(x) = -u_{xxx} + 2\partial_x u^2, \quad (15.10)$$

$$\zeta_5(x) = -u_x^{(4)} + \partial_x^2 u^2 + u_x^2 + 2u_{xx}u - 2u^3, \quad (15.11)$$

Мы видим, что $\zeta_2(x)$ и $\zeta_4(x)$ – полные производные локальных выражений, а потому дают нули при интегрировании по всей оси. Покажем, что это справедливо для всех четных коэффициентов $\zeta_{2j}(x)$. Для этого запишем

$$\zeta(x, k) = \zeta_{\text{Re}}(x, k) + i\zeta_{\text{Im}}(x, k), \quad (15.12)$$

где обозначено

$$\zeta_{\text{Re}}(x, k) = \frac{\zeta(x, k) + \overline{\zeta(x, \bar{k})}}{2}, \quad \zeta_{\text{Im}}(x, k) = \frac{\zeta(x, k) - \overline{\zeta(x, \bar{k})}}{2i}, \quad (15.13)$$

т.е. мы сопрягаем только коэффициенты асимптотического ряда (15.6). Тогда в силу (15.5)

$$\partial_x \zeta_{\text{Im}} + 2\zeta_{\text{Re}} \zeta_{\text{Im}} - 2k\zeta_{\text{Re}} = 0. \quad (15.14)$$

Ввиду условия на k это равенство можно записать как

$$\zeta_{\text{Re}}(x, k) = -\frac{1}{2} \partial_x \ln(\zeta_{\text{Im}}(x, k) - k), \quad (15.15)$$

что доказывает, что $\zeta_{\text{Re}}(x, k)$, а значит и все четные коэффициенты ряда (15.6) суть полные производные локальных функций. Для $\zeta_{\text{Re}}(x, k)$ аналогичного свойства нет, а потому мы вводим интегралы движения посредством равенств

$$I_{j-1} = \frac{1}{2} \int dx \zeta_{2j+1}(x), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (15.16)$$

В силу (15.7), (15.9), (15.10) и (15.11) для младших интегралов имеем явно:

$$I_{-1} = \frac{-1}{2} \int dx u(t, x), \quad I_0 = \frac{1}{2} \int dx u^2(t, x), \quad (15.17)$$

$$I_1 = \frac{-1}{2} \int dx (u_x^2 + 2u^3), \quad (15.18)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int dx (u_{xx}^2 - 5u^2 u_{xx} + 5u^4). \quad (15.19)$$

Итак, мы доказали в силу (15.3), (15.4) и (15.6), что выполнено асимптотическое разложение

$$\ln a(k) = \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{2I_j}{(2ik)^{2j+3}}. \quad (15.20)$$

С другой стороны, в силу (13.11)

$$\ln a(k) = \sum_{n=1}^N \ln \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} + \frac{i}{2\pi} \int dk' \frac{\ln(1 - |r(k')|^2)}{k' - k}, \quad \text{Im} k > 0, \quad (15.21)$$

так что полагая, что $r(k) \in \mathcal{S}$, а также используя равенство $|r(-k)| = |r(k)|$, мы получаем явное выражение интегралов движения через данные рассеяния:

$$\ln a(k) = \sum_{j=-1}^{\infty} \frac{i}{k^{2j+3}} \left\{ \frac{2(-1)^j}{2j+3} \sum_{n=1}^N \kappa_n^{2j+3} - \frac{1}{\pi} \int dk k^{2(j+1)} \ln(1 - |r(k)|^2) \right\}, \quad (15.22)$$

что по (15.20) дает

$$I_j = \frac{2^{2j+3}(-1)^j}{2j+3} \sum_{n=1}^N \kappa_n^{2j+3} + (-1)^j \frac{2^{2(j+1)}}{\pi} \int dk k^{2(j+1)} \ln(1 - |r(k)|^2). \quad (15.23)$$

Подчеркнем, что интегралы движения зависят только от “половины” данных рассеяния: переменных $|r(k)|$ и κ_n , но не зависят от $\arg r(k)$ и β_n (переменные действие–угол).

Особого внимания заслуживают три младших интеграла:

$$Q = -2I_{-1} = \int dx u(t, x) = 4 \sum_{n=1}^N \kappa_n + \frac{2}{\pi} \int dk \ln(1 - |r(k)|^2), \quad (15.24)$$

$$P = I_0 = \frac{1}{2} \int dx u^2(t, x) = \frac{8}{3} \sum_{n=1}^N \kappa_n^3 + \frac{4}{\pi} \int dk k^2 \ln(1 - |r(k)|^2), \quad (15.25)$$

$$H = -I_1 = \int dx \left(\frac{1}{2} u_x^2 + u^3 \right) = \frac{-32}{5} \sum_{n=1}^N \kappa_n^5 + \frac{16}{\pi} \int dk k^4 \ln(1 - |r(k)|^2). \quad (15.26)$$

Задача 21 Восстановить детали вывода равенств (15.1).

Задача 22 Показать прямым вычислением, что $I_{-1} = \frac{-1}{2} \int dx u(t, x)$, $I_0 = \frac{1}{2} \int dx u^2(t, x)$ и $I_1 = \frac{-1}{2} \int dx (u_x^2 + 2u^3)$ суть интегралы движения уравнения $K\partial\Phi$, $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$.

16 Лекция.

16.1 Скобки Гарднера и Магри

Замечательным свойством интегрируемых уравнений является наличие бесконечной иерархии не только интегралов движения, но и пуассоновых скобок. Мы приведем здесь только первый и второй члены этой иерархии, скобки Гарднера–Захарова–Фаддеева и Магри. Первая из них задается равенством

$$\begin{aligned} \{F(u), G(u)\}_0 &= \frac{1}{2} \int dx \left(\frac{\delta F}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta G}{\delta u(x)} - \frac{\delta G}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta F}{\delta u(x)} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \left(\frac{\delta F}{\delta u(+)} \frac{\delta G}{\delta u(-)} - \frac{\delta F}{\delta u(-)} \frac{\delta G}{\delta u(+)} \right), \end{aligned} \quad (16.1)$$

где использовано обозначение

$$\frac{\delta F}{\delta u(\pm)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\delta F}{\delta u(x)}. \quad (16.2)$$

Рассмотрим для простоты скобки на таких функционалах, что для по крайней мере одной из вариаций $\frac{\delta F}{\delta u(\pm)}$ или $\frac{\delta G}{\delta u(\pm)} = 0$. Тогда (16.1) заметно упрощается:

$$\{F(u), G(u)\}_0 = \int dx \frac{\delta F}{\delta u(x)} \partial_x \frac{\delta G}{\delta u(x)}, \quad (16.3)$$

причем именно в таком виде она и была получена первоначально. Отсюда, в частности,

$$\{u(x), u(y)\}_0 = \delta'(x - y) \quad (16.4)$$

В силу (15.26) и (15.18)

$$H = -I_1 = \int dx \left(\frac{1}{2} u_x^2 + u^3 \right) \quad (16.5)$$

так что

$$\frac{\delta H}{\delta u(x)} = 3u^2 - u_{xx} \quad (16.6)$$

Динамика КдФ задается посредством

$$u_t = \{u, H\}_0 = \partial_x \frac{\delta H}{\delta u(x)} = \partial_x (3u^2 - u_{xx}) \quad (16.7)$$

так что по (15.24)

$$\{u(x), Q\}_0 = 0. \quad (16.8)$$

Однако, по (16.1) для произвольного функционала $F(u)$ имеем:

$$\{F(u), Q\}_0 = \frac{\delta F}{\delta u(-)} - \frac{\delta F}{\delta u(+)}, \quad (16.9)$$

т.е. возникает поразительная ситуация, аналога которой для систем конечного числа свободы нет: скобка Пуассона Q с $u(x)$ равна нулю, а с некоторыми функционалами от $u(x)$ нулю не равна. Тем не менее Q часто называют аннулятором скобки Гарднера–Захарова–Фаддеева. Далее, легко видеть, что

$$\{u, P\}_0 = u_x, \quad (16.10)$$

т.е. P – генератор пространственных трансляций, а H в силу (16.7) – гамильтониан уравнения КдФ, дающий его динамику: $u_t = \partial_x(3u^2 - u_{xx})$.

Следующая в иерархии скобка, скобка Магри, задается посредством

$$\{F, G\}_1 = \int dx \int dy \frac{\delta F}{\delta u(x)} \left(-\frac{\delta'''(x-y)}{4} + \frac{u(x) + u(y)}{2} \delta'(x-y) \right) \frac{\delta G}{\delta u(y)}, \quad (16.11)$$

откуда

$$\{u(x), u(y)\}_1 = -\frac{\delta'''(x-y)}{4} + \frac{u(x) + u(y)}{2} \delta'(x-y). \quad (16.12)$$

Для этой скобки все интегралы сдвигаются:

$$2\{u(x), Q\}_1 = u_x(x), \quad 4\{u(x), P\}_1 = \partial_x(3u^2 - u_{xx}) = u_t, \quad (16.13)$$

так что гамильтонианом, порождающим КдФ, теперь будет бывший импульс. Заметим, что в отличие от H функционал P положительно определен. По отношению к обоим скобкам старшие интегралы порождают старшие уравнения иерархии КдФ, причем эволюции по отношению к старшим временам являются симметриями уравнения КдФ, или любого из старших уравнений.

16.2 Солитонные решения: $r \equiv 0$.

В этом случае (14.14) сводится к

$$\varphi_-(x, k) = e^{-ikx} + i \sum_n \frac{e^{i(\kappa_n - k)x} \gamma_n(x)}{k - i\kappa_n}, \quad (16.14)$$

а (14.17) – к

$$u(x) = 2\partial_x \sum_n e^{-\kappa_n x} \gamma_n(x). \quad (16.15)$$

Таким образом, уравнения обратной задачи в данном частном случае сводятся к системе **алгебраических** уравнений на функции γ_n . Действительно, вводя $N \times N$ матрицу

$$A_{n,m} = \delta_{n,m} + \frac{e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x} \beta_n}{\kappa_n + \kappa_m}, \quad (16.16)$$

мы записываем (14.16) в виде

$$\sum_{m=1}^N A_{n,m} \gamma_m = \beta_n e^{-\kappa_n x}.$$

Отсюда

$$\gamma_n = \frac{\det A^{(n)}}{\det A}, \quad (16.17)$$

где матрица $A^{(n)}$ получается из A заменой n -го столбца на столбец $\beta_n e^{-\kappa_n x}$. Подставляя (16.17) в (16.15), заметим что по правилу дифференцирования определителей:

$$\sum_n e^{-\kappa_n x} \det A^{(n)} = -\partial_x \det A,$$

так что окончательно для N солитонного решения получаем

$$u(x) = -2\partial_x^2 \ln \det A. \quad (16.18)$$

Поскольку в выражение (16.18) для потенциала входит только детерминант матрицы A , мы можем преобразовывать эту матрицу. Введем

$$\beta_n = 2\kappa_n e^{2\kappa_n q_n}. \quad (16.19)$$

Тогда по (16.16):

$$\begin{aligned} \det A &= \det \left[\delta_{n,m} + \frac{2\kappa_n}{\kappa_n + \kappa_m} e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x + 8\kappa_n^3 t + 2\kappa_n q_n} \right] = \\ &= \det \left[\text{diag} \left(\sqrt{\kappa_n} e^{4\kappa_n^3 t + \kappa_n q_n} \right) \right] \times \\ &\quad \times \det \left(\delta_{n,m} + \frac{2\sqrt{\kappa_n \kappa_m}}{\kappa_n + \kappa_m} e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x + 4(\kappa_n^3 + \kappa_m^3)t + (\kappa_n + \kappa_m)q_n} \right) \times \\ &\quad \times \det \left[\text{diag} \left(\sqrt{\kappa_m^{-1}} e^{-4\kappa_m^3 t - \kappa_m q_m} \right) \right]. \end{aligned}$$

Первый и последний сомножители сокращают друг друга, так что

$$\det A = \det \left(\delta_{n,m} + \frac{2\sqrt{\kappa_n \kappa_m}}{\kappa_n + \kappa_m} e^{-\theta_n - \theta_m} \right),$$

где

$$\theta_n(t, x) = \kappa_n(x - q_n) - 4\kappa_n^3 t. \quad (16.20)$$

Более того, поскольку в (16.18) входит лишь вторая производная логарифма детерминанта матрицы A , то понятно, что преобразования матрицы, которые ведут к умножению ее на постоянную по x , или на линейную по x экспоненту не приводят к изменению потенциала. Будем обозначать преобразования матрицы A , которые сохраняют потенциал $u(x)$ знаком \cong . В частности, как легко видеть

$$A \cong \left\| \delta_{m,n} + \frac{2\kappa_n}{\kappa_m + \kappa_n} e^{-2\theta_n} \right\|. \quad (16.21)$$

Рассмотрим свойства введенных солитонных решений.

16.3 Односолитонное решение, $N = 1$.

В этом простейшем случае

$$\begin{aligned} \det A \equiv A &= 1 + \frac{\beta}{2\kappa} e^{-2\kappa(x - 4\kappa^2 t)} = 1 + e^{-2\kappa(x - 4\kappa^2 t - q)} = \\ &= 2e^{-\kappa(x - 4\kappa^2 t - q)} \text{ch } \kappa(x - 4\kappa^2 t - q), \end{aligned}$$

где мы использовали (16.19). Поэтому

$$\gamma = \frac{\beta e^{-\kappa x + 8\kappa^3 t}}{A} = \kappa e^{\kappa x} (1 - \text{th } \kappa(x - 4\kappa^2 t - q))$$

$$\begin{aligned}\varphi_-(x, k) &= e^{-ikx} \left(1 + \frac{i\kappa}{k - i\kappa} (1 - \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2 t - q)) \right) = \\ &= \frac{e^{-ikx}}{k - i\kappa} (k - i\kappa \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2 t - q))\end{aligned}$$

В данном случае $a(k) = \frac{k-i\kappa}{k+i\kappa}$, $a'(i\kappa) = \frac{1}{2i\kappa}$, $b(k) \equiv 0$, но $b_1 = e^{2\kappa q_n} \neq 0$, что наглядно демонстрирует, что $b_1 \neq b(i\kappa_n)$. Далее по (14.13)

$$\varphi_+(x, k) = \frac{e^{-ikx}}{k + i\kappa} (k - i\kappa \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2 t - q)).$$

Тогда

$$u(t, x) = -\frac{2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t - q)}.$$

Кроме того, мы имеем:

$$\chi_+(x, k) = \frac{k - i\kappa \operatorname{th} \kappa(x - 4\kappa^2 t - q)}{k + i\kappa}$$

и

$$\varphi_+(x, i\kappa) = \frac{e^{4\kappa^3 t + \kappa q}}{2 \operatorname{ch} \kappa x}.$$

16.4 Двусолитонное решение, $N = 2$.

В данном случае

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 + e^{-2\kappa_1(x-q_1-4\kappa_1^2 t)} & \frac{2\kappa_1}{\kappa_1+\kappa_2} e^{-(\kappa_1+\kappa_2)x+8\kappa_1^3 t+2\kappa_1 q_1} \\ \frac{2\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2} e^{-(\kappa_1+\kappa_2)x+8\kappa_2^3 t+2\kappa_2 q_2} & 1 + e^{-2\kappa_2(x-q_2-4\kappa_2^2 t)} \end{vmatrix},$$

так что

$$\begin{aligned}\det A &= 1 + e^{-2\kappa_1(x-q_1-4\kappa_1^2 t)} + e^{-2\kappa_2(x-q_2-4\kappa_2^2 t)} + \\ &+ \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} \right)^2 e^{-2\kappa_1(x-q_1-4\kappa_1^2 t) - 2\kappa_2(x-q_2-4\kappa_2^2 t)}.\end{aligned}$$

Введем

$$\theta_n = \kappa_n(x - q_n) - 4\kappa_n^3 t + \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \ln \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}, \quad (16.22)$$

где по определению $\varphi > 0$. Тогда

$$\det A = \frac{2e^{-\theta_1 - \theta_2}}{\kappa_1 + \kappa_2} \left[(\kappa_1 - \kappa_2) \operatorname{ch}(\theta_1 + \theta_2) + (\kappa_1 + \kappa_2) \operatorname{ch}(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

и решение может быть записано в одной из следующих форм:

$$\begin{aligned}u(t, x) &= -2\partial_x^2 \ln \left((\kappa_1 - \kappa_2) \operatorname{ch}(\theta_1 + \theta_2) + (\kappa_1 + \kappa_2) \operatorname{ch}(\theta_1 - \theta_2) \right) = \\ &= -2\partial_x^2 \ln (\kappa_1 \operatorname{ch} \theta_1 \operatorname{ch} \theta_2 - \kappa_2 \operatorname{sh} \theta_1 \operatorname{sh} \theta_2) = \\ &= -2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \frac{\kappa_1^2 \operatorname{ch}^2 \theta_2 + \kappa_2^2 \operatorname{sh}^2 \theta_1}{(\kappa_1 \operatorname{ch} \theta_1 \operatorname{ch} \theta_2 - \kappa_2 \operatorname{sh} \theta_1 \operatorname{sh} \theta_2)^2}.\end{aligned} \quad (16.23)$$

Рассмотрим асимптотики этого решения на временной бесконечности. Для этого перепишем (16.23) в виде

$$u(t, x) = -2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \frac{\frac{\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2 \theta_1} + \frac{\kappa_2^2 \operatorname{th}^2 \theta_1}{\operatorname{ch}^2 \theta_2}}{(\kappa_1 - \kappa_2 \operatorname{th} \theta_1 \operatorname{th} \theta_2)^2}.$$

Очевидно, что $u(t, x) \rightarrow 0$, если $t \rightarrow \infty$ так, что обе величины θ_1 и $\theta_2 \rightarrow \infty$. Рассмотрим поэтому случай, когда $t \rightarrow \infty$ так что либо θ_1 , либо θ_2 конечны. По определению

$$\theta_2 = 4\kappa_2(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)t + \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\theta_1 + \kappa_2(q_1 - q_2) + \frac{\varphi}{2\kappa_1}(\kappa_1 - \kappa_2).$$

Итак,

если θ_1 конечна, то $\theta_2 \rightarrow \pm\infty$ при $t \rightarrow \pm\infty$;

если θ_2 конечна, то $\theta_1 \rightarrow \mp\infty$ при $t \rightarrow \pm\infty$.

таким образом, если θ_1 конечна при $t \rightarrow \pm\infty$, то

$$u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_1^2}{\left(\frac{\kappa_1 \operatorname{ch} \theta_1}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} \mp \frac{\kappa_2 \operatorname{sh} \theta_1}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}}\right)^2}.$$

По (16.22)

$$\frac{\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} = \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2}, \quad \frac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}} = \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2},$$

и окончательно

$$\text{если } \theta_1 \text{ ограничена и } t \rightarrow \pm\infty, \text{ то } u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2(\theta_1 \mp \frac{\varphi}{2})}.$$

Аналогично получаем, что

$$\text{если } \theta_2 \text{ ограничена и } t \rightarrow \pm\infty, \text{ то } u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_2^2}{\operatorname{ch}^2(\theta_2 \pm \frac{\varphi}{2})}.$$

Суммируя, мы видим, что независимо от способа стремления

$$\text{при } t \rightarrow -\infty: \quad u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2(\theta_1 + \frac{\varphi}{2})} - \frac{2\kappa_2^2}{\operatorname{ch}^2(\theta_2 - \frac{\varphi}{2})},$$

$$\text{при } t \rightarrow +\infty: \quad u(t, x) \rightarrow -\frac{2\kappa_1^2}{\operatorname{ch}^2(\theta_1 - \frac{\varphi}{2})} - \frac{2\kappa_2^2}{\operatorname{ch}^2(\theta_2 + \frac{\varphi}{2})}.$$

Действительно, если x и t стремятся к бесконечности так, что одна из θ_n ограничена, то слагаемое в правой части, зависящее от другой θ стремится к нулю, что дает полученный выше результат. Если же обе θ_n стремятся к бесконечности, то мы имеем ноль слева и ноль справа. Полученная асимптотика с очевидностью демонстрирует, что солитоны сохраняют при взаимодействии свою форму и приобретают сдвиги фаз – изменения знака φ . Точно также ведут себя солитонные решения и в общем, N -солитонном случае.

16.5 Асимптотика по t N -солитонных решений (для желающих разобрать самостоятельно)

В дальнейшем нам потребуется детерминант

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \det \left\| \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \right\|_{m,n=1}^l. \quad (16.24)$$

Покажем, что для него имеется явная формула:

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \prod_{i=1}^l \frac{1}{2\kappa_i} \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^l \frac{|\kappa_i - \kappa_j|}{\kappa_i + \kappa_j}. \quad (16.25)$$

Доказательство проводится по индукции. Очевидно, что при $l = 1$ (16.24) дает $D(\kappa_1) = (2\kappa_1)^{-1}$, что совпадает с (16.25). Далее, для детерминанта (16.24) выполняется рекуррентная формула

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \frac{D(\kappa_1, \dots, \kappa_{l-1})}{2\kappa_l} \prod_{j=1}^{l-1} \left(\frac{\kappa_i - \kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} \right)^2. \quad (16.26)$$

Чтобы доказать ее заметим, что

$$\begin{aligned} D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) &= \prod_{j=1}^l \frac{1}{\kappa_l + \kappa_j} \det \left\| \frac{\kappa_m + \kappa_l}{\kappa_m + \kappa_n} \right\|_{m,n=1}^l = \\ &= \prod_{j=1}^l \frac{1}{\kappa_l + \kappa_j} \det \left\| 1 + \frac{\kappa_l - \kappa_n}{\kappa_m + \kappa_n} \right\|_{m,n=1}^l, \end{aligned}$$

т.е. в последнем столбце ($n = l$) стоят только единицы. Вычитая последний столбец из всех предыдущих и вынося множители $\kappa_l - \kappa_n$ из всех столбцов с $n \leq l - 1$, получаем

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \frac{1}{2\kappa_l} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \det \begin{pmatrix} \left\| \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \right\|_{m,n=1}^{l-1} & \mathbf{1} \\ \frac{1}{\kappa_l + \kappa_n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычтем теперь последнюю строку из всех предыдущих:

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) = \frac{1}{2\kappa_l} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \det \begin{pmatrix} \left\| \frac{\kappa_l - \kappa_m}{(\kappa_m + \kappa_n)(\kappa_l + \kappa_n)} \right\|_{m,n=1}^{l-1} & \mathbf{0} \\ \frac{1}{\kappa_l + \kappa_n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Вынося теперь $\kappa_l - \kappa_m$ из всех строк и $(\kappa_l + \kappa_n)^{-1}$ из всех столбцов мы получаем (16.26).

Теперь мы готовы исследовать асимптотику правой части (16.21), где θ_n определены в (16.22). Когда обе переменные x и t стремятся к бесконечности в общем направлении, то и все θ_n стремятся к $+\infty$ или $-\infty$. Переупорядочим нумерацию так, чтобы в заданном направлении

$$\begin{aligned} \theta_n &\rightarrow +\infty, & n = 1, \dots, l \\ \theta_n &\rightarrow -\infty, & n = l + 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Тогда

$$\det A \cong \det \left\| \delta_{m,n} + \frac{2\kappa_n e^{-2\theta_n}}{\kappa_m + \kappa_n} \left| \delta_{m,n} e^{2\theta_n} + \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \right. \right\|, \quad \begin{matrix} n \leq l \\ n \geq l+1 \end{matrix}$$

Левая часть матрицы стремится к единичной матрице, а правая часть стремится к матрице типа введенной в (16.24), поэтому все это выражение стремится к $D(\kappa_{l+1}, \dots, \kappa_N)0$. По (16.25) эта величина отлична от нуля, поэтому по (16.18) и $u(t, x) \rightarrow 0$ в общем направлении. Рассмотрим теперь случай, когда x и t стремятся к нулю так, что некоторое θ_l фиксировано. Это означает, что

$$x = c + 4\kappa_l^2 t,$$

где c – некоторая константа.

$$\theta_n|_{x=c+4\kappa_l^2 t} = \kappa_n(c - q_n) + 4\kappa_n(\kappa_l^2 - \kappa_n^2)t$$

и мы рассматриваем предел $t \rightarrow \pm\infty$. При этом далее мы, как обычно, будем полагать, что нумерация выбрана так, что $\kappa_1 > \dots > \kappa_N$. Тогда

$$\begin{aligned} \theta_n|_{x=c+4\kappa_l^2 t} &= \begin{cases} -\infty, & n < l \\ +\infty & n > l \end{cases}, \quad t \rightarrow +\infty, \\ \theta_n|_{x=c+4\kappa_l^2 t} &= \begin{cases} +\infty, & n < l \\ -\infty & n > l \end{cases}, \quad t \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

Запишем теперь интересующий нас детерминант в виде

$$\det A \cong \det \left\| \delta_{m,n} e^{2\theta_n} + \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \left| \delta_{m,n} + \frac{2\kappa_n e^{-2\theta_n}}{\kappa_m + \kappa_n} \right. \right\|, \quad \begin{matrix} n \leq l \\ n \geq l+1 \end{matrix}$$

Пусть $t \rightarrow +\infty$. В пределе в столбцах с $(l+1)$ -го по N -ый стоит единичная матрица. Разлагая детерминант последовательно по всем этим столбцам, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ \theta_l = \text{const}}} \det A &\cong \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} & \frac{2\kappa_l e^{-2\theta_l}}{\kappa_m + \kappa_l} \\ \frac{1}{\kappa_l + \kappa_n} & 1 + e^{-2\theta_l} \end{array} \right| = \\ &= D(\kappa_1, \dots, \kappa_{l-1}) + 2\kappa_l e^{-2\theta_l} D(\kappa_1, \dots, \kappa_l) \cong \\ &\cong 1 + e^{-2\theta_l} \prod_{j=1}^{l-1} \left(\frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, независимо от способа стремления на бесконечность, мы имеем, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \det A \cong \prod_{l=1}^N \left[1 + e^{-2\theta_l} \prod_{j=1}^{l-1} \left(\frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \right)^2 \right],$$

причем легко показать, что поправочные члены убывают экспоненциально.

Рассмотрим аналогично предел $t \rightarrow -\infty$ при условии, что $\theta_l = \text{const}$. Тогда

$$\det A \cong \det \left\| \delta_{m,n} + \frac{2\kappa_n e^{-2\theta_n}}{\kappa_m + \kappa_n} \left| \delta_{m,n} e^{2\theta_n} + \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \right. \right\|, \quad \begin{matrix} n \leq l \\ n \geq l+1 \end{matrix}$$

Отсюда

$$\lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ \theta_l = \text{const}}} \det A \cong \begin{vmatrix} n=l & n>l \\ 1 + \frac{2\kappa_l e^{-2\theta_l}}{\kappa_m + \kappa_l} & \frac{1}{\kappa_l + \kappa_n} \\ \frac{2\kappa_l e^{-2\theta_l}}{\kappa_l + \kappa_n} & \frac{1}{\kappa_m + \kappa_n} \end{vmatrix} \cong \\ \cong D(\kappa_{l+1}, \dots, \kappa_N) + 2\kappa_l e^{-2\theta_l} D(\kappa_l, \dots, \kappa_N).$$

По аналогии с (16.26) можно показать, что

$$D(\kappa_l, \dots, \kappa_N) = \frac{D(\kappa_{l+1}, \dots, \kappa_N)}{2\kappa_l} \prod_{j=l+1}^N \left(\frac{\kappa_i - \kappa_j}{\kappa_i + \kappa_j} \right)^2, \quad (16.27)$$

так что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \det A(t, x) \cong \prod_{l=1}^N \left[1 + e^{-2\theta_l} \prod_{j=l+1}^N \left(\frac{\kappa_l - \kappa_j}{\kappa_l + \kappa_j} \right)^2 \right].$$

Итак, по (16.18) мы окончательно получаем, что

$$u(t, x) = - \sum_{l=1}^N \frac{2\kappa_l^2}{\text{ch}^2(\theta_l - \varphi_l^\pm)}, \quad t \rightarrow \pm\infty, \quad (16.28)$$

где

$$\varphi_l^+ = \sum_{j=1}^{l-1} \ln \frac{|\kappa_l - \kappa_j|}{\kappa_l + \kappa_j} < 0, \quad \varphi_l^- = \sum_{j=l+1}^N \ln \frac{|\kappa_l - \kappa_j|}{\kappa_l + \kappa_j} < 0.$$

Полученный результат доказывает два замечательных свойства солитонных решений. Во-первых, каждое такое решение на обоих асимптотиках стремится к сумме односолитонных решений. Во-вторых, рассеяние солитонов упруго: оно сводится лишь к изменению фаз солитонов, причем

$$\varphi_l^+ - \varphi_l^- = \sum_{j=1}^{l-1} \ln \frac{|\kappa_l - \kappa_j|}{\kappa_l + \kappa_j} - \sum_{j=l+1}^N \ln \frac{|\kappa_l - \kappa_j|}{\kappa_l + \kappa_j}.$$

В частности,

$$\varphi_1^+ - \varphi_1^- = \sum_{j=2}^N \ln \frac{\kappa_1 + \kappa_j}{\kappa_1 - \kappa_j},$$

и

$$\varphi_2^+ - \varphi_2^- = \sum_{j=3}^N \ln \frac{\kappa_2 + \kappa_j}{\kappa_2 - \kappa_j} - \ln \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}.$$

На самом деле, легко показать, что оба указанных свойства, равно как и формулы для фаз имеют место и для общих решений, т.е. решений с ненулевым коэффициентом отражения. Иными словами, непрерывный спектр не дает вклада в рассеяние солитонов.

Задача 23 Вывести асимптотику общего N -солитонного решения (необязательная задача).

17 Вопросы к зачету

1. Коммутаторные тождества
2. Операторная реализация коммутаторных соотношений
3. Оператор одевания
4. Оператор K^{-1}
5. Свойства символа оператора B
6. Прямая и сопряженная задачи
7. Асимптотическое разложение оператора одевания
8. Уравнения эволюций оператора K
9. Свойства оператора Γ
10. Законы сохранения
11. Общая схема метода обратной задачи. Уравнение Кортевега–де Фриза
12. Решения Йоста
13. Асимптотическое поведение решений Йоста по k .
14. Матрица монодромии, свойства элементов матрицы монодромии.
15. Дискретный спектр
16. Простота нулей $a(k)$
17. Дисперсионное соотношение.
18. Обратная задача: задача Римана–Гильберта
19. Временная эволюция данных рассеяния.
20. Вывод уравнения Штурма–Лиувилля из уравнений обратной задачи.
21. Интегралы движения.
22. Скобки Гарднера–Захарова–Фаддеева и Магри.
23. Одно- и двусолитонные решения.