Содержание

1 Комплексные числа и комплексная плоскость

Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Комплексное число – это упорядоченная пара вещественных чисел (x, y). Два комплексных числа (x, y) и (x', y') равны в том и только в том случае, когда $x = x'$, $y = y'$. Понятия "больше"/"меньше"для комплексных чисел не определены.

Общепринятая форма записи: $z = x + iy$; $x = \operatorname{Re} z$ называется вещественной частью, а $y = \operatorname{Im} z$ – мнимой частью комплексного числа z. Символ i называется мнимой единицей. Число $\bar{z} = x - iy$ называется комплексно сопряженным к z. Неотрицательное вещественное число $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа z.

На множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел можно ввести алгебраические операции, превращающие его в поле:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Правило умножения получается раскрытием скобок с учетом $i^2 = -1$. Деление z_1/z_2 $(z_2 \neq 0)$ сводится к умножению на $\bar{z}_2$ в числителе:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i\,\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}$$

Отметим, что матрицы вида $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ образуют поле, изоморфное полю $\mathbb{C}$. Мнимая единица представляется матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Геометрическая интерпретация. Чрезвычайно полезна геометрическая интерпретация комплексного числа как вектора на плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами x, y. Сложение и вычитание при этом соответствуют сложению и вычитанию векторов. Умножение и деление проще выглядят в полярных координатах $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; здесь r – модуль, а φ – аргумент комплексного числа (определенный с точностью до прибавления произвольного кратного 2π). При умножении модули перемножаются, а аргументы складываются.

Геометрическая интерпретация подсказывает ввести евклидову метрику на $\mathbb{C}$, в которой расстоянием между z_1 и z_2 является модуль разности $|z_1 - z_2|$.

Часто бывает удобно компактифицировать комплексную плоскость $\mathbb{C}$ путем добавления к ней одной точки, которая называется бесконечно удаленной точкой $z = \infty$; $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$. Наглядно эту компактификацию можно представить себе с помощью стереографической проекции единичной сферы $S = \{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$ в 3-мерном пространстве (ξ, η, ζ) на плоскость (ξ, η), которую надо отождествить с плоскостью (x, y). Южный полюс сферы при этом проектируется в начало координат, а северный соответствует точке ∞. Формулы проекции:

$$\xi = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \quad \eta = \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \quad \zeta = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

Обратное отображение:

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \qquad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}$$

Пути и кривые. Путем на комплексной плоскости будем называть непрерывное отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ вещественной оси в $\mathbb{C}$ (или в $\overline{\mathbb{C}}$). Более развернутое определение: путь – это комплекснозначная функция $z = \gamma(t)$ вещественного аргумента t, непрерывная в каждой точке $t_0 \in [\alpha, \beta]$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется δ такое, что $|\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \varepsilon$ при всех $|t - t_0| < \delta$.

Назовем два пути $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ и $\gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$ эквивалентными если существует непрерывная строго возрастающая функция $\tau : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha_2, \beta_2]$ такая, что $\gamma_1(t) = \gamma_2(\tau(t))$ для всех $t \in [\alpha_1, \beta_1]$. Легко проверить, что это соотношение эквивалентности. Кривой называется класс эквивалентных в этом смысле путей.

Неформально говоря, путь γ_2 получается из γ_1 заменой параметра. Иными словами, путь – это кривая вместе с ее параметризацией.

Обычно на пути и кривые налагают дополнительные ограничения. Будем называть путь $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ жордановым, если отображение γ непрерывно и взаимно однозначно. Соответственно, жорданова кривая – это класс эквивалентности жордановых путей. Для большинства наших целей, однако, достаточно кусочно гладких путей, для которых отображение γ непрерывно дифференцируемо в каждой точке t за исключением конечного их числа (где требуется только непрерывность), и $\gamma'(t) \neq 0$ при всех $t \in [\alpha, \beta]$. Гладкой кривой будем называть класс путей, получающихся из некоторого гладкого пути всевозможными заменами параметра, в которых τ – непрерывно дифференцируемая функция с положительной производной. Для кусочно гладкой кривой потребуем, чтобы допустимые замены параметров были непрерывными и всюду, кроме, быть может, конечного числа точек имели непрерывную положительную производную.

Области. Стандартная окрестность точки a – диск с центром в a:

$$U_\varepsilon(a) = \Big\{ z \in \mathbb{C} : \ |z - a| < \varepsilon \Big\}$$

Будем рассматривать также "проколотые окрестности" $\Big\{ z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z - a| < \varepsilon \Big\}$.

Областью D на (расширенной) комплексной плоскости называется множество точек в $\mathbb{C}$ (или в $\overline{\mathbb{C}}$) такое, что

а) Для любой точки $a \in \mathsf{D}$ найдется окрестность $U_\varepsilon(a) \subset \mathsf{D}$ (открытость),

б) Для любых точек $a, b \in \mathsf{D}$ найдется лежащий в D путь с концами a, b (линейная связность).

Точки, не принадлежащие D, такие, что в любой их окрестности существуют точки как принадлежащие, так и не принадлежащие D, называются граничными точками. Совокупность всех граничных точек области D называется *границей* $\partial\mathsf{D}$ области D.

Теорема. *Граница любой области* D *является замкнутым множеством.*

Доказательство. Пусть z_0 – любая предельная точка множества $\partial\mathsf{D}$. Надо показать, что $z_0 \in \partial\mathsf{D}$. Возьмем произвольную окрестность U точки z_0. По определению предельной точки в ней существует точка $z_1 \in \partial\mathsf{D}$. Возьмем окрестность $V \subset U$ точки z_1. В V, а значит и в U, найдутся как точки из D, так и точки, не принадлежащие D. Это и означает, что z_0 – граничная точка. ∎

Замыкание области определяется как $\bar{\mathsf{D}} = \mathsf{D} \cup \partial\mathsf{D}$.

Точки $\overline{\mathbb{C}}$, не принадлежащие D и не являющиеся ее граничными точками (т.е. точки дополнения к $\overline{\mathsf{D}}$) называются *внешними точками.* Для каждой из них существует окрестность, не содержащая точек из D.

Область D называется ограниченной, если существует такой диск $U_R(0)$, что $\mathsf{D} \subset U_R(0)$.

Область называется односвязной, если ее граница – связное множество, и многосвязной – в противном случае. Порядком связности области называется число связных компонент ее границы.

2 Функции комплексной переменной

Говорят, что на множестве $E \subset \mathbb{C}$ точек комплексной плоскости задана функция, если задан закон, ставящий в соответствие каждой точке множества E некоторое (комплексное) число:

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Здесь u и v – некоторые вещественнозначные функции точки $z = x + iy$. Задание w равносильно заданию двух действительных функций u, v из E в $\mathbb{R}$. Функция называется *однолистной*, если из равенства $w(z_1) = w(z_2)$ следует равенство $z_1 = z_2$.

Предел и непрерывность. Понятия непрерывности и предела функции определяются аналогично случаю функции вещественной переменной с заменой интервалов на диски $U_\varepsilon(a)$. Например:

- Число w_0 называется пределом функции $w(z)$ в точке z_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех точек z, удовлетворяющих условию $0 < |z - z_0| < \delta$, выполнено $|w(z) - w_0| < \varepsilon$.

Функция называется непрерывной в точке z_0, если ее предел в этой точке существует, конечен и совпадает со значением функции в этой точке. Из непрерывности функции $w(z)$ следует непрерывность функций u, v как функций двух вещественных переменных, и обратно.

Примеры функций: $w = az + b$, $w = 1/z$, $w = z^2$, $w = \bar{z}$.

Произвольные функции комплексной переменной можно представлять себе как отображения из областей в $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. Теория становится содержательной, если выделить специальный класс комплексно-дифференцируемых функций.

Комплексная дифференцируемость. Условия Коши-Римана. Пусть $w(z)$ – функция из некоторой области $\mathsf{D} \subset \mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, и $z_0 \in \mathsf{D}$. Если предел

$$w'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{w(z_0 + \Delta z) - w(z_0)}{\Delta z}$$

существует и конечен, то говорят, что $w'(z_0)$ есть *комплексная производная* функции w в точке z_0. Здесь важно то, что существование предела означает его независимость от направления, по которому происходит приближение к точке z_0. Функцию, у которой есть комплексная производная, будем называть $\mathbb{C}$-дифференцируемой.

Пример $\mathbb{C}$-дифференцируемой функции: $w(z) = z^n$, $w'(z) = nz^{n-1}$. Пример недифференцируемой (но непрерывной) функции: $w(z) = \bar{z}$. Пример функции, $\mathbb{C}$-дифференцируемой ровно в одной точке: $w(z) = z\bar{z}$ (она $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке $z = 0$ и более нигде).

Свойство $\mathbb{C}$-дифференцируемости налагает сильные условия на вещественную и мнимую части комплекснозначной функции.

Теорема. *Пусть функция $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки z, причем в этой точке функции u, v дифференцируемы как функции двух вещественных переменных ($\mathbb{R}$-дифференцируемы). Тогда для $\mathbb{C}$-дифференцируемости функции $w(z)$ необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись соотношения*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(условия Коши-Римана).

а) <u>Необходимость</u>. Пусть существует $w'(z) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{w(z + h) - w(z)}{h}$; воспользуемся замечанием о независимости этого предела от способа приближения к точке z.

Пусть сначала точка $z + h$ приближается к z по прямой, параллельной вещественной оси, т.е. $h = t$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда имеем:

$$w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

Если же точка $z + h$ приближается к z по прямой, параллельной мнимой оси, т.е. $h = it$, $t \in \mathbb{R}$, имеем:

$$w'(z) = -i\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Приравнивая правые части, получаем условия Коши-Римана.

б) <u>Достаточность</u>. Дифференцируемость функций u, v как функций двух вещественных переменных ($\mathbb{R}$-дифференцируемость) означает

$$u(x+s, y+t) - u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\,s + \frac{\partial u}{\partial y}\,t + \alpha|h|$$

$$v(x+s, y+t) - v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}\,s + \frac{\partial v}{\partial y}\,t + \beta|h|$$

где $\alpha, \beta \to 0$ вместе с $h = s + it$. Тогда приращение функции $w(z)$ имеет вид

$$w(z+h) - w(z) = \frac{\partial u}{\partial x}\,s + \frac{\partial u}{\partial y}\,t + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,s + \frac{\partial v}{\partial y}\,t\right) + (\alpha + i\beta)|h|$$

Подставив сюда условия Коши-Римана, получим

$$w(z+h) - w(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)(s + it) + (\alpha + i\beta)|h| = Ah + (\alpha + i\beta)|h|$$

Здесь A – вполне определенное число, не зависящее от h, а $\alpha + i\beta$ стремится к 0 вместе с h. Поделив это соотношение на h, видим, что предел $h \to 0$ существует и равен A. ∎

Условие $\mathbb{C}$-дифференцируемости можно представить в несколько ином виде. Введем обозначения

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

что можно понимать как переход от вещественных координат x, y к комплексным "координатам" $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Тогда имеем

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + i\,\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(-i\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\,\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Следовательно, $w'(z) = \partial w/\partial z$, а условия Коши-Римана предстанут как независимость функции от $\bar{z}$:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$$

Дифференциал произвольной комплексной функции запишется в этих обозначениях в виде

$$dw = \frac{\partial w}{\partial z}\,dz + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z}$$

Обобщение условий Коши-Римана: если s, n – два ортогональных направления, причем поворот от s к n совершается против часовой стрелки, то

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}$$

Из определения комплексной производной следует, что на функции комплексной переменной распространяются известные из курса математического анализа правила дифференцирования.

Теорема. *Пусть функции $f, g : \mathsf{D} \to \mathbb{C}$ имеют комплексные производные в точке z_0. Тогда функции $f \pm g$, fg, f/g ($g(z_0) \neq 0$) тоже имеют комплексные производные в точке z_0, которые даются стандартными формулами.*

Верны также соответствующие теоремы о производной сложной и обратной функций.

Рассмотрим еще производную по направлению. Если положить $h = |h|e^{i\theta}$, приращение функции при сдвиге по направлению θ запишется в виде

$$\Delta w = w(z+h) - w(z) = \frac{\partial w}{\partial z}|h|e^{i\theta} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}|h|e^{-i\theta} + o(h)$$

Деля обе части на h и переходя к пределу $h \to 0$, получим производную w по направлению θ:

$$\frac{\partial w}{\partial z_\theta} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} e^{-2i\theta}$$

Отсюда хорошо видно, что при $\partial w/\partial \bar{z} = 0$ производная не зависит от направления.

Голоморфные функции. Функция $f : \mathsf{D} \to \mathbb{C}$ называется *голоморфной* в области $\mathsf{D} \subset \mathbb{C}$, если она имеет комплексную производную в каждой точке $z \in \mathsf{D}$. Говорят также, что функция голоморфна в точке, если она голоморфна в некоторой окрестности этой точки.

Пример функции, $\mathbb{C}$-дифференцируемой в точке $z = 0$, но не голоморфной: $w(z) = |z|^2$.

Понятие голоморфности можно распространить и на точку ∞: функция f, заданная в окрестности точки ∞, называется голоморфной в точке ∞, если функция $g(z) := f(1/z)$ голоморфна в точке 0.

Примеры голоморфных функций:

- Полиномы $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$.

- Функция $\sqrt[n]{z}$, обратная к z^n, n-значна, но можно выделить однозначные ветви.

- Экспонента определяется равенством $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Для нее верны свойства вещественной экспоненты $(e^z)' = e^z$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. Добавляется свойство периодичности $e^{z+2\pi i} = e^z$.

- Тригонометрические функции $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

- Логарифм определяется как функция, обратная экспоненте; $\log z = \log |z| + i\arg z$. Она бесконечнозначна.

Физическая интерпретация. Рассмотрим векторное поле $\vec{A} = (A_x, A_y)$ на плоскости. Будем считать, что функции $A_x(x, y)$, $A_y(x, y)$ обладают непрерывными частными производными. Тогда справедливы соотношения

$$\oint (\vec{A}, \vec{n}) ds = \int\int \mathrm{div}\vec{A}\, dxdy, \qquad \mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$$

(теорема Гаусса) и

$$\oint (\vec{A}, \vec{s}) ds = \int\int \mathrm{rot}\vec{A}\, dxdy, \qquad \mathrm{rot}\vec{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

(формула Грина). Поле называется соленоидальным (или безвихревым), если $\mathrm{div}\vec{A} = 0$ и потенциальным (или бездивергентным), если $\mathrm{rot}\vec{A} = 0$.

Для многих физических приложений интерес представляют поля, которые одновременно и потенциальны, и соленоидальны (поле скоростей жидкости, поле потока тепла, электрическое поле в вакууме). В силу равенства перекрестных производных в потенциальном поле форма $A_x dx + A_y dy = du$ является точным дифференциалом некоторой функции u, которая называется потенциальной функцией поля. Таким образом, в потенциальном поле

$$A_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad A_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

или $\vec{A} = \mathrm{grad} u$. Из условия соленоидальности следует, что и форма $-A_y dx + A_x dy = dv$ является точным диффференциалом некоторой функции v, т.е.

$$A_x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad A_y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

На линии уровня функции v имеем $dv = -A_y dx + A_x dy = 0$, т.е. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{A_y}{A_x}$. Отсюда видно, что линия уровня функции v является линией тока поля $\vec{A}$ (траекторией частиц жидкости в гидродинамической интерпретации).

Рассмотрим теперь комплексную функцию

$$w = u + iv$$

которая называется комплексным потенциалом поля. Из условий потенциальности и соленоидальности следуют условия Коши-Римана для функций u и v. Следовательно, комплексный потенциал – голоморфная функция. Взяв производную, можно убедиться, что

$$w'(z) = A_x - iA_y$$

Голоморфные функции и конформные отображения. Пусть $f = u + iv$ – $\mathbb{C}$-значная функция, $\mathbb{R}$-дифференцируемая в точке z_0. Это означает, что определен дифференциал функции

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)d\bar{z}$$

который можно рассматривать как линейное отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (вектор (dx, dy) переходит в (du, dv)). Отображение окрестности точки z_0 в $\mathbb{C}$ называется *конформным* в точке z_0, если его дифференциал невырожден (взаимно-однозначен) и является композицией поворота и растяжения. Отображение, задаваемое функцией f называется конформным в области D, если оно конформно в каждой точке этой области.

Теорема. *Отображение, задаваемое $\mathbb{R}$-дифференцируемой функцией f конформно в точке z_0 тогда и только тогда, когда функция f $\mathbb{C}$-дифференцируема в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$.*

<u>Доказательство</u>.

а) $\Longleftarrow$. Пусть f $\mathbb{C}$-дифференцируема в z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда ее дифференциал

$$df(z_0) = f'(z_0)dz = |f'(z_0)|e^{i\varphi}dz, \quad \varphi = \arg f'(z_0)$$

является композицией поворота на угол $\varphi = \arg f'(z_0)$ и растяжения в $|f'(z_0)|$ раз. Невырожденность очевидна. Следовательно, отображение конформно.

б) $\Longrightarrow$. Пусть f $\mathbb{R}$-дифференцируема в z_0. Тогда ее дифференциал $df(z_0) = Adz + Bd\bar{z}$. Отображение $dz \mapsto idz$ геометрически является поворотом на 90 градусов против часовой стрелки. Любые повороты и растяжения коммутируют с ним. В силу конформности с ним должен коммутировать дифференциал отображения, т.е. $Aidz + B\overline{idz} = i(Adz + Bd\bar{z})$. Отсюда $2iBd\bar{z} = 0$ для всех $dz \Longrightarrow B = 0$ и тем самым f $\mathbb{C}$-дифференцируема в z_0. ∎

Прямое вычисление показывает, что якобиан дифференциала $\mathbb{R}$-дифференцируемой функции в точке z_0 равен

$$J(df(z_0)) = \left|\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\right|^2$$

Для $\mathbb{C}$-дифференцируемых функций второе слагаемое отсутствует, откуда видно, что якобиан невырожденного отображения всегда положителен, т.е. отображение сохраняет ориентацию. Как известно, коэффициент растяжения площадей равен $|J|$, что согласуется с тем, что линейное растяжение при отображении $f(z)$ не зависит от направления и равно $|f'(z_0)|$.

3 Дробно-линейные функции

Дробно-линейное отображение (ДЛО) задается функцией вида

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

Доопределим его в точках $z = \infty$ и $z = -d/c$ (при $c \neq 0$): $f(\infty) = a/c$, $f(-d/c) = \infty$. Если $c = 0$, положим $f(\infty) = \infty$.

Теорема. *ДЛО задает гомеоморфизм, т.е. взаимно-однозначное непрерывное отображение $\overline{\mathbb{C}}$ на себя. Более того, оно является конформным отображением.*

<u>Доказательство</u>. Пусть $c \neq 0$. Взаимная однозначность следует из формулы

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

для обратного отображения. В точках $z \neq -d/c, \infty$ непрерывность очевидна, а при $z = -d/c, \infty$ вытекает из предельных соотношений

$$\lim_{z \to -d/c} \frac{az + b}{cz + d} = \infty, \quad \lim_{z \to \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}$$

При $z \neq -d/c, \infty$ конформность следует из голоморфности $w = f(z)$ и того, что производная

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$$

Для проверки конформности в точке $z = -d/c$ надо проверить конформность отображения

$$W = \frac{1}{w} = \frac{cz + d}{az + b}$$

в этой точке. Действительно, производная $\dfrac{dW}{dz} = \dfrac{bc - ad}{(az + b)^2}$ при $z = -d/c$ существует и равна $\dfrac{c^2}{bc - ad} \neq 0$. Конформность в точке $z = \infty$ эквивалентна конформности отображения $f(1/z)$, которая проверяется, как и выше. ■

Множество Λ ДЛО является группой относительно операции композиции (прямая проверка). Сопоставив каждой обратимой матрице

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$$

ДЛО $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$, получим гомоморфизм групп $GL(2, \mathbb{C}) \to \Lambda$. Он сюрьективен, а его ядро состоит из скалярных матриц. Имеют место изоморфизмы групп

$$\Lambda \cong GL(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^* \cong SL(2, \mathbb{C})/\{\pm I\} = PSL(2, \mathbb{C})$$

Окружностью на расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ называется любая окружность или прямая в $\mathbb{C}$.

Теорема. *ДЛО переводит любую окружность в окружность.*

<u>Доказательство</u>. Уравнение окружности: $A(x^2 + y^2) + B_1 x + B_2 y + C = 0$ или в комплексных координатах $Az\bar{z} + Bz + \bar{B}\bar{z} + C = 0$. Прямая проверка показывает, что при ДЛО уравнение сохраняет свой вид. ■

ДЛО описываются тремя независимыми комплексными параметрами. Поэтому можно ожидать, что ДЛО задается своими значениями в трех различных точках.

Предложение. *Каковы бы ни были три различные точки* $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ *и три различные точки* $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$, *существует единственное ДЛО, такое, что* $w_k = f(z_k)$.

Доказательство. ДЛО $f_1(z) = \dfrac{z - z_1}{z - z_2} \dfrac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$ переводит точки z_1, z_2, z_3 в $0, \infty, 1$. Аналогично $f_2(w) = \dfrac{w - w_1}{w - w_2} \dfrac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$ переводит точки w_1, w_2, w_3 в $0, \infty, 1$. Поэтому $f = f_2^{-1} \circ f_1$ переводит z_1, z_2, z_3 в w_1, w_2, w_3. Явная формула для $w = f(z)$ получается из

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_2} \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$$

Теперь докажем единственность. Пусть ДЛО f переводит z_1, z_2, z_3 в w_1, w_2, w_3. Тогда $F = f_2 \circ f \circ f_1^{-1}$ оставляет точки $0, \infty, 1$ неподвижными. Из $F(\infty) = \infty$ следует $F(z) = Az + B$, условие $F(0) = 0$ дает $B = 0$, а $F(1) = 1$ дает $A = 1$. Тем самым $F(z) = z$, и, следовательно, $f = f_2^{-1} \circ f_1$ определено единственным образом. ∎

Двойное отношение и производная Шварца. Непосредственным вычислением находим

$$f(z) - f(z') = \frac{(ad - bc)(z - z')}{(cz + d)(cz' + d)} = (f'(z))^{1/2}(f'(z'))^{1/2}(z - z')$$

Из этой формулы следует, что двойное отношение четырех точек

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_4)}$$

остается инвариантным при ДЛО:

$$(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

Имеем соотношение

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{2c}{cz + d} \quad \text{и потому, если } c \neq 0, \text{ то} \quad \frac{f'(z)}{f''(z)} = -\frac{z}{2} - \frac{d}{2c}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{f'(z)}{f''(z)} - \frac{f'(\zeta)}{f''(\zeta)} = -\frac{1}{2}(z - \zeta)$$

В пределе $\zeta \to z$ имеем

$$\frac{d}{dz} \frac{f'(z)}{f''(z)} = -\frac{1}{2}$$

Это соотношение эквивалентно обращению в нуль производной Шварца $S_f = 0$, которая для любой мероморфной функции f определяется формулой

$$S_f = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

Существует тесная связь между производной Шварца и двойным отношением:

$$(f(z+ta), f(z+tb), f(z+tc), f(z+td)) = (a,b,c,d)\left(1+\frac{t^2}{6}(a-b)(c-d)S_f(z)+O(t^3)\right)$$

Еще одно соотношение с производной Шварца:

$$\lim_{\zeta\to z}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\zeta}\log\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} = \frac{1}{6}\,S_f(z)$$

Дробно-линейные автоморфизмы основных областей. Можно получить следующее описание дробно-линейных автоморфизмов основных областей.

- Замкнутая плоскость: $\operatorname{Aut}\overline{\mathbb{C}} = \left\{z \to \dfrac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc\neq 0\right\}$
- Открытая плоскость: $\operatorname{Aut}\mathbb{C} = \left\{z\to az+b,\quad a\neq 0\right\}$
- Единичный круг: $\operatorname{Aut}\mathbb{U} = \left\{z\to e^{i\alpha}\,\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z},\quad |a|<1, \alpha\in\mathbb{R}\right\}$
- Верхняя полуплоскость: $\operatorname{Aut}\mathbb{H} = \left\{z\to\dfrac{az+b}{cz+d},\quad a,b,c,d\in\mathbb{R},\, ad-bc>0\right\}$

4 Показательная функция

Определим функцию e^z тем же предельным соотношением, которым она определяется в вещественном анализе:

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

По правилам возведения в степень

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}},\qquad \arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n\operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}$$

Отсюда видно, что существуют

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = e^x,\qquad \lim_{n\to\infty}\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = y$$

а значит и исходный предел, который записывается в полярной форме так:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Полагая $x=0$, получим формулу Эйлера

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

До сих пор символ e^{iy} служил сокращенным обозначением правой части. Теперь мы можем понимать его как мнимую степень числа e.

Свойства показательной функции:

- *Функция e^z голоморфна во всей плоскости.* В самом деле, $e^z = u + iv$ с $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$, и для них выполняются условия Коши-Римана.
- *Сохраняется обычная формула дифференцирования.* В самом деле, производную, когда она существует, можно вычислять в направлении x, и тогда

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y + ie^x \sin y) = e^z$$

- *Сохраняется формула* $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.
- *Периодичность* $e^{z+2\pi i} = e^z$.

Покажем, что $2\pi i$ является основным периодом. Пусть $e^{z+T} = e^z$, тогда $e^T = 1$, откуда, полагая $T = T_1 + iT_2$, имеем $e^{T_1}(\cos T_2 + i \sin T_2) = 1$. Но тогда $e^{T_1} = 1$, т.е. $T_1 = 0$, и $\cos T_2 = 1$, $\sin T_2 = 0$, т.е. $T_2 = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $T = 2\pi in$, и $2\pi i$ является примитивным периодом.

Тригонометрические функции комплексного аргумента определяются формулами

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

5 Интегрирование функций комплексной переменной

Пусть задана ориентированная кривая $C \subset \mathbb{C}$ с концами a, b и на ней – комплекснозначная функция $f(z)$. Интегралом от $f(z)$ по кривой C называют предел интегральных сумм

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) := \int_C f(z)dz$$

(если предел существует). Здесь $z_0 = a, z_1, \ldots, z_n, z_{n+1} = b$ – последовательные точки, разбивающие C на n участков, ζ_k – произвольная точка на дуге $[z_k, z_{k+1}]$ кривой. Предел берется в предположении, что $\max |z_{k+1} - z_k| \to 0$. Интеграл по замкнутой кривой ($b = a$) часто обозначается символом $\oint$.

Если C – кусочно-гладкая кривая, а $f(z)$ – кусочно-непрерывная и ограниченная функция, интеграл всегда существует. Положим $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$,

$$\begin{cases} z_k = x_k + iy_k, \quad x_{k+1} - x_k = \Delta x_k, \quad y_{k+1} - y_k = \Delta y_k \\ \zeta_k = \xi_k + i\eta_k, \quad u(\xi_k, \eta_k) = u_k, \quad v(\xi_k, \eta_k) = v_k \end{cases}$$

тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k\Big) + i \sum_{k=0}^{n-1}\Big(u_k \Delta y_k + v_k \Delta x_k\Big)$$

Суммы в правой части являются интегральными суммами для криволинейных интегралов от функций вещественной переменной, которые в наших предположениях существуют. Следовательно,

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i \int_C (udy + vdx)$$

По самому своему определению интеграл зависит только от кривой, но не от ее параметризации. Если же выбрать некоторую параметризацию $\gamma(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, интеграл сведется к интегралу по отрезку $[\alpha, \beta]$ вещественной оси:

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Иногда эту формулу берут в качестве определения комплексного интеграла; тогда надо доказывать независимость от параметризации, что следует из правила дифференцирования сложной функции.

Свойства интеграла. На интегралы от функций комплексной переменной распространяются обычные свойства криволинейных интегралов:

$$\int_C (af(z) + bg(z))dz = a\int_C f(z)dz + b\int_C g(z)dz$$

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

$$\int_{C^-} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

Лемма (оценка интеграла). *Пусть $M = max|f(z)|$ на кривой C, а L – длина кривой C, тогда*

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz| \le ML$$

Эта оценка непосредственно следует из оценки интегральных сумм.

Примеры.

1) Вычислим интеграл $I = \oint_{C_R} \bar{z}dz$, где C_R – окружность радиуса R с центром в a, ориентированная против часовой стрелки. Введем параметризацию $z = a + Re^{it}$, тогда

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\bar{a} + Re^{-it}\right) iRe^{it}dt = 2\pi i R^2$$

Этот пример можно существенно обобщить:

$$\oint_{\partial \mathsf{D}} \bar{z}\, dz = 2iS(\mathsf{D}), \quad S(\mathsf{D}) = \text{ площадь области } \mathsf{D}$$

2) Вычислим интеграл $I_n = \oint_{C_R} (z-a)^n dz$, $n \in \mathbb{Z}$. Используя ту же параметризацию, находим:

$$I_n = iR^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt$$

Отсюда видим, что $I_n = 0$ при $n \ne -1$, $I_{-1} = 2\pi i$.

3) Вычислим интеграл $J_n = \int_{C_{a,b}} z^n dz$, $n \in \mathbb{N}$, где $C_{a,b}$ – кривая, соединяющая точки a, b. Используем произвольную параметризацию $z = \gamma(t)$:

$$J_n = \int_\alpha^\beta \gamma^n(t)\gamma'(t)dt = \frac{1}{n+1}\int_\alpha^\beta \frac{d}{dt}\Big(\gamma^{n+1}(t)\Big)dt$$
$$= \frac{\gamma^{n+1}(\beta) - \gamma^{n+1}(\alpha)}{n+1} = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

Таким образом, при $n \neq -1$ интеграл зависит лишь от начальной и конечной точки кривой. При $n = -1$ это не так.

6 Теорема Коши

Интегральная теорема Коши – один из наиболее важных результатов в ТФКП.

Упрощенный вариант (с предположением о непрерывной производной). Пусть функция f $\mathbb{C}$-дифференцируема в односвязной области D и f' непрерывна в D. Тогда для любой замкнутой кривой $\gamma \subset \mathsf{D}$

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

Для доказательства воспользуемся известной из анализа формулой Грина

$$\oint_\gamma (Pdx + Qdy) = \iint_{\mathsf{G}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

где G – область, ограниченная кривой γ. В нашем случае

$$\begin{aligned}\oint_\gamma f(z)dz &= \oint_\gamma (udx - vdy) + i\oint_\gamma (vdx + udy) \\ &= \iint_{\mathsf{G}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_{\mathsf{G}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy\end{aligned}$$

и оба интеграла равны 0 в силу условий Коши-Римана. Отметим еще, что в комплексных обозначениях формула Грина запишется в виде

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2i\iint_{\mathsf{G}} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, dxdy$$

На самом деле предположение о непрерывности f' излишне. (Мы вскоре убедимся, что производная голоморфной функции сама голоморфна.) Можно также включить в рассмотрение неодносвязные области.

Общий случай. Первым шагом в обобщении теоремы Коши является лемма Гурса.

Лемма (Гурса). *Если функция f голоморфна в области D, то интеграл от нее по ориентированной границе любого треугольника $\Delta \subset \mathsf{D}$ равен 0.*

Отметим, что односвязность области не предполагается; но весь треугольник (а не только его граница) должен лежать в ней целиком.

Доказательство. Пусть существует треугольник $\Delta \subset \mathsf{D}$ такой, что

$$\left|\oint_{\partial\Delta} f dz\right| = M > 0$$

Разобьем его на 4 треугольника средними линиями. Очевидно, исходный интеграл равен сумме интегралов по границам маленьких треугольников. Поэтому по крайней мере для одного из маленьких треугольников (назовем его Δ_1) должно быть

$$\left|\oint_{\partial\Delta_1} f dz\right| \geq \frac{M}{4}$$

Треугольник Δ_1 снова разобьем средними линиями на 4 треугольника, и из тех же соображений для по крайней мере одного из них (назовем его Δ_2) должно быть

$$\left|\oint_{\partial\Delta_2} f dz\right| \geq \frac{M}{4^2}$$

Продолжая рассуждение, построим семейство вложенных друг в друга треугольников Δ_k таких, что

$$\left|\oint_{\partial\Delta_n} f dz\right| \geq \frac{M}{4^n}$$

Треугольники Δ_k (мы считаем их замкнутыми) имеют общую точку $z_0 \in \mathsf{D}$. Так как f голоморфна в z_0, можно написать

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0)$$

причем для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $|\alpha(z)| < \varepsilon$ для всех z из окрестности $U = \{|z - z_0| < \delta\}$. В U лежит хотя бы один треугольник построенной последовательности, обозначим его Δ_n. Проинтегрируем обе части равенства по его границе. Интегралы от первых двух слагаемых равны 0, так что

$$\oint_{\partial\Delta_n} f dz = \oint_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z - z_0)dz$$

причем $|\alpha(z)| < \varepsilon$ и $|z - z_0| < |\partial\Delta_n|$ (периметр треугольника) для всех $z \in \partial\Delta_n$. Оценка интеграла дает $\left|\oint_{\partial\Delta_n} f dz\right| < \varepsilon|\partial\Delta_n|^2$. Но по построению $|\partial\Delta_n| = |\partial\Delta|/2^n$, откуда

$$\left|\oint_{\partial\Delta_n} f dz\right| < \varepsilon\frac{|\partial\Delta|^2}{4^n}$$

Таким образом,

$$\frac{M}{4^n} \leq \left|\oint_{\partial\Delta_n} f dz\right| < \varepsilon\frac{|\partial\Delta|^2}{4^n}$$

т.е. $M < \varepsilon|\partial\Delta|^2$. Ввиду произвольности ε это означает, что $M = 0$. ∎

Следствие: в предположениях леммы Гурса интеграл по границе любого многоугольника лежащего в D (замкнутой ломаной) равен 0. Интеграл $\oint_\gamma f(z)dz$ по замкнутой кривой $\gamma \subset \mathsf{D}$ можно с любой точностью приблизить интегралом по замкнутой ломаной.

Первообразная. Первообразной функции f в области $\mathsf{D} \subset \mathbb{C}$ называется голоморфная в D функция F такая, что

$$F'(z) = f(z) \quad \text{для всех } z \in \mathsf{D}$$

Предложение. *Если F_1, F_2 – две первообразные функции f в области D, то $F_2 - F_1 = C$, где C – константа.*

Доказательство. Функция $F := F_2 - F_1$ удовлетворяет условиям $\partial F/\partial\bar{z} = \partial F/\partial z = 0$, откуда следует, что $F = C$. ∎

Изучим вопрос о существовании первообразной. Во-первых, покажем, что локально (в круге) первообразная всегда существует.

Предложение. *Пусть функция f голоморфна в области D. Тогда в любом содержащемся в D круге $U = \{|z - z_0| < r\}$ она имеет первообразную $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$, где $z, z_0 \in \mathsf{D}$, где интеграл берется по прямолинейному отрезку $[z_0, z]$.*

Доказательство. Пусть $z + \Delta z$ – точка в D, лежащая в достаточно малой окрестности точки z. По лемме Гурса

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta + \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta + \int_{z+\Delta z}^{z_0} f(\zeta)d\zeta = 0$$

Первое слагаемое здесь равно $F(z)$, третье – $F(z + \Delta z)$ со знаком минус, поэтому имеем

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$$

Очевидно,

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta$$

Оценим

$$\sigma := \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \big(f(\zeta) - f(z)\big)d\zeta$$

Имеем:

$$|\sigma| \le \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z} \big|f(\zeta) - f(z)\big|\,|d\zeta|$$

В силу непрерывности функции f в точке z для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|z - \zeta| < \delta$ имеет место неравенство

$$\big|f(\zeta) - f(z)\big| < \varepsilon$$

Так как ζ принадлежит отрезку $[z, z+\Delta z]$, то $|z-\zeta| \le |\Delta z|$ и, следовательно, неравенство $\Big|f(\zeta)-f(z)\Big| < \varepsilon$ выполнено, если $|\Delta z| < \delta$. Тогда $|\sigma| < \frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon|\Delta z|$, т.е. $|\sigma| < \varepsilon$ если $|\Delta z| < \delta$. Это означает существование предела

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

т.е. $F' = f$. ■

Первообразная вдоль пути. Пусть в области D задана функция f и γ – непрерывный путь (отображение отрезка $I=[\alpha,\beta]$ в D). Функция $\Phi : I \to \mathbb{C}$ называется первообразной функции f вдоль пути γ, если она: 1) непрерывна, 2) для любой точки $t_0 \in I$ существует круг U с центром в $\gamma(t_0)$, в котором f имеет первообразную F_U, причем

$$F_U(\gamma(t)) = \Phi(t)$$

везде в некоторой окрестности $u_{t_0} \subset I$.

Заметим, что если f имеет первообразную F во всей области D, то функция $F(\gamma(t))$ будет первообразной вдоль пути. В общем случае первообразная вдоль пути, являясь функцией параметра t, может не быть функцией точки z.

Теорема. *Для любой голоморфной функции f и любого непрерывного пути $\gamma : I \to \mathsf{D}$ первообразная вдоль пути существует и определяется с точностью до постоянного слагаемого.*

Доказательство. Разобьем отрезок $I=[\alpha,\beta]$ на n перекрывающихся отрезков $I_k = [t_k, t'_k]$ (берем $t_k < t_{k+1} < t'_k$). Пользуясь равномерной непрерывностью функции γ, выберем I_k столь малыми, чтобы для любого k дуга кривой $\gamma(I_k)$ содержалась бы в круге U_k, в котором f имеет первообразную.

Среди всех первообразных в U_1 (они отличаются на константу) выберем произвольно одну и обозначим ее F_1. Рассмотрим какую-либо первообразную в U_2; в пересечении $U_1 \cap U_2$ она может отличаться от F_1 лишь постоянным слагаемым (ибо это две первообразные одной и той же функции). Назовем F_2 ту первообразную в U_2, которая совпадает с F_1 в пересечении $U_1 \cap U_2$.

Продолжая в том же духе, мы в каждом U_k выберем первообразную F_k так, что $F_k = F_{k-1}$ в пересечении $U_{k-1} \cap U_k$. Функция

$$\Phi(t) = F_k(\gamma(t)), \qquad t \in I_k \qquad (k = 1, \dots, n)$$

будет первообразной вдоль пути. Произвол в выборе F_1 приводит к тому, что она определяется с точностью до постоянного слагаемого. ■

Справедлива формула Ньютона-Лейбница: если $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ – кусочно-гладкий путь, функция f непрерывна на нем и имеет первообразную $\Phi(t)$ вдоль γ, то

$$\int_\gamma f dz = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

В самом деле, пусть сначала путь гладкий и лежит в области, где функция f имеет первообразную F. Тогда $\Phi(t) = F(\gamma(t)) + C$, а $\Phi'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$. По определению интеграла

$$\int_\gamma f dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\alpha^\beta \Phi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

В общем случае можно разбить γ на конечное число гладких путей, каждый из которых лежит в области, где f имеет первообразную. Складывая результаты интегрирования по этим путям, получаем наше утверждение.

В многосвязной области глобальной первообразной может не быть. Например, $f(z) = 1/z$ в кольце $\{0 < |z| < 1\}$. (Если бы первообразная существовала, интеграл вдоль любого замкнутого пути равнялся бы 0, что не так.)

Теорема Коши о гомотопии. Эта теорема утверждает, что значение интеграла от голоморфной функции по пути с фиксированными концами зависит только от гомотопического класса пути.

Положим $I = [0, 1]$.

- Два пути $\gamma_0 : I \to \mathsf{D}$ и $\gamma_1 : I \to \mathsf{D}$ с общими концами $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$ называются *гомотопными* в области D, если существует непрерывное отображение $\gamma(s, t) : I \times I \to \mathsf{D}$ такое, что

$$\gamma(0, t) = \gamma_0(t), \qquad \gamma(1, t) = \gamma_1(t),$$

$$\gamma(s, 0) = a, \qquad \gamma(s, 1) = b$$

Гомотопность двух путей $\gamma_0 \sim \gamma_1$ в области D означает возможность непрерывно продеформировать их друг в друга в области D. Гомотопность является отношением эквивалентности, так что все пути можно разбить на *гомотопические классы*. В односвязной области любые два пути с общими концами гомотопны друг другу.

Теорема (Коши). *Если f – голоморфная функция в области D, а γ_0, γ_1 – два пути, гомотопные друг другу в D, то*

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz$$

Доказательство. Пусть семейство путей $\gamma_s(t) = \gamma(s, t) : I \to \mathsf{D}$ осуществляет гомотопию γ_0 в γ_1. Положим

$$J(s) = \int_{\gamma_s} f dz$$

Нужно доказать, что $J(0) = J(1)$. Для этого достаточно показать, что функция $J(s)$ локально постоянна на I, т.е. каждая точка $s_0 \in I$ обладает окрестностью $v_{s_0} \subset I$ такой, что $J(s) = J(s_0)$ для всех $s \in v_{s_0}$.

Пусть Φ – произвольно выбранная первообразная функции f вдоль пути γ_{s_0}. Рассмотрим разбиение отрезка I точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$ на отрезки $I_j = [t_{j-1}, t_j]$, для которых найдутся:

а) Круги U_j такие, что $\gamma_{s_0}(I_j) \subset U_j$

б) Первообразные F_j функции f в U_j такие, что $\Phi(t) = F_j(\gamma_{s_0}(t))$ на I_j и $F_j = F_{j-1}$ на $U_j \cap U_{j-1}$.

В силу равномерной непрерывности функции γ на $I \times I$ найдется окрестность v_{s_0} точки s_0 такая, что $\gamma(v_{s_0} \times I_j) \subset U_j$ при всех j. Рассмотрим функцию $\Phi_s : I \to \mathbb{C}$ переменной t, зависящую от $s \in v_{s_0}$ как от параметра:

$$\Phi_s(t) = F_j(\gamma_s(t)) \quad \text{на } I_j$$

Она является первообразной функции f вдоль пути γ_s.

По формуле Ньютона-Лейбница

$$J(s) = \int_{\gamma_s} f dz = \Phi_s(1) - \Phi_s(0)$$

Эта функция не зависит от $s \in v_{s_0}$. Действительно, для гомотопных путей с общими концами ($\gamma_s(0) = a$, $\gamma_s(1) = b$) числа $\Phi_s(0) = F_1(\gamma_s(0)) = F_1(a)$, $\Phi_s(1) = F_n(\gamma_s(1)) = F_n(b)$ не зависят от s. Значит, их разность тоже не зависит от s.

Если γ_0 и γ_1 гомотопны как замкнутые пути ($\gamma_s(0) = \gamma_s(1)$), функции F_1 и F_n как две первообразные функции f в окрестности $U_1 \cap U_n$ точки $z_s = \gamma_s(0) = \gamma_s(1)$ отличаются на не зависящую от s константу C, т.е.

$$J(s) = F_n(\gamma_s(1)) - F_1(\gamma_s(0)) = F_n(z_s) - F_1(z_s) = C$$

не зависит от s. ∎

Следствие. Если функция f голоморфна в области D, и путь $\gamma : I \to \mathsf{D}$ гомотопен нулю в D, то

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Следствие очевидно, поскольку интеграл по постоянному пути $\gamma(t) = z_0$ равен 0.

Следствие. *Если функция f $\mathbb{C}$-дифференцируема в односвязной области D, то интеграл от нее не зависит от пути интегрирования. Именно, если $\gamma \subset \mathsf{D}$ и $\gamma_1 \subset \mathsf{D}$ – кривые, имеющие одни и те же концы, то*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

Вытекает из того, что в односвязной области любые два пути гомотопны.

Следствие. *Если функция f дифференцируема в односвязной области D, то она имеет в этой области первообразную $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$. Любая первообразная выражается формулой $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta + C$.*

Имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta = F(z_1) - F(z_0)$$

и правило интегрирования по частям.

Теорема Коши допускает некоторые формальные усиления и обобщения. Например, она остается в силе, когда кривая γ является границей области D, а функция f дифференцируема в D и непрерывна в замыкании $\bar{\mathsf{D}}$ (т.е. вплоть до границы). Схема доказательства такова. Надо найти последовательность областей $\mathsf{D}_1 \subset \mathsf{D}_2 \subset \ldots \subset \mathsf{D}$ с простыми границами такую, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{D}_n = \mathsf{D}$ и проверить, пользуясь непрерывностью f в $\bar{\mathsf{D}}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \oint_{\partial \mathsf{D}_n} f dz = \oint_{\partial \mathsf{D}} f dz$$

Так как $\oint_{\partial \mathsf{D}_n} f dz = 0$, отсюда будет следовать, что и $\oint_{\partial \mathsf{D}} f dz = 0$.

Имеется также обобщение на неодносвязные области – в этом случае нулю равен интеграл от f по всем компонентам границы (с учетом их ориентации). Доказательство заключается в сведении к односвязному случаю путем проведения разрезов между различными компонентами границы.

7 Интегральная формула Коши

Интеграл Коши. Интегральная формула Коши восстанавливает функцию, голоморфную в области, по ее значению на границе этой области.

Теорема. *Пусть* D *– область, границей которой служит простая кривая, и функция* f *голоморфна в области* $\mathsf{G} \supset \bar{\mathsf{D}}$*. Тогда для всех* $z \in \mathsf{D}$ *справедлива формула*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathsf{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Доказательство. Рассмотрим диск U_r с центром в точке z. При достаточно малых $r > 0$ $\bar{U}_r \subset \mathsf{D}$. Применим теорему Коши к области $\mathsf{D} \setminus \bar{U}_r$ и функции $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$. Получим:

$$\oint_{\partial \mathsf{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{\partial U_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Интеграл в правой части не зависит от r. Покажем, что он равен $2\pi i f(z)$. Имеем

$$\oint_{\partial U_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) = \oint_{\partial U_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

где использовано равенство $\displaystyle\oint_{\partial U_r} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$. Из непрерывности функции f в точке z и оценки интеграла следует, что правая часть сколь угодно мала при $r \to 0$:

$$\left| \oint_{\partial U_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \le \max_{\zeta \in U_r} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{r} 2\pi r \le 2\pi \max_{\zeta \in U_r} |f(\zeta) - f(z)|$$

Но поскольку она не зависит от r, она должна быть равна 0. ∎

Если $z \notin \bar{\mathsf{D}}$, то $\displaystyle\oint_{\partial \mathsf{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$ по теореме Коши.

Теорема о среднем. Применив формулу Коши к окружности ∂U_r с центром в точке a в параметризации $\zeta = a + re^{i\theta}$ получим

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta$$

т.е. значение голоморфной функции в центре любой окружности равно ее среднему значению на самой окружности (теорема о среднем).

Принцип максимума модуля. Из теоремы о среднем легко вывести утверждение, что модуль непостоянной голоморфной функции не может достигать максимального значения во внутренней точке области. В самом деле, предположим, что максимум модуля достигается в некоторой внутренней точке z_0, т.е.

$$|f(z_0)| = M \geq |f(z)|$$

По теореме о среднем

$$2\pi M = 2\pi|f(z_0)| = \left|\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})d\varphi\right| \leq \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|d\varphi \leq 2\pi M$$

откуда заключаем, что

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})|d\varphi = 2\pi M$$

В силу непрерывности функции f на контуре отсюда следует, что $|f(z)| = M$ при $z = z_0 + re^{i\varphi}$. Действительно, по условию $|f(z)|$ не может быть больше M ни в одной точке окружности радиуса r. Если же мы предположим, что в какой-то точке ζ этой окружности $|f(\zeta)|$ строго меньше M, то из непрерывности следует, что $|f(\zeta)| < M$ и в некоторой окрестности точки ζ, т.е. можно указать отрезок $[\varphi_1, \varphi_2]$ интегрирования, на котором $|f(z)| \leq M - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тогда получаем противоречие:

$$2\pi M = \int_0^{2\pi} = \int_0^{\varphi_1} + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} + \int_{\varphi_2}^{2\pi} \leq (M - \varepsilon)(\varphi_2 - \varphi_1) + M(2\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)) < 2\pi M$$

Итак, на окружности радиуса r функция $|f(z)|$ имеет постоянное значение, равное своему максимуму. То же будет иметь место и на любой окружности меньшего радиуса с центром в z_0, а следовательно и во всем круге K_0.

Теперь легко показать, что это же значение функция $|f(z)|$ принимает и в любой внутренней точке z_* области. Для этого соединим точки z_0 и z_* кривой C, целиком лежащей в области и отстоящей от ее границы на некоторое $d > 0$. Возьмем точку z_1, являющуюся последней общей точкой кривой C и круга K_0. Поскольку $|f(z_1)| = M$, можно повторить предыдущее рассуждение для точки z_1 и показать, что внутри круга K_1 с центром в z_1 радиуса $R_1 \geq d$ функция $|f(z)|$ имеет постоянное значение, равное M. Продолжая этот процесс, мы за конечное число шагов достигнем точки z_*.

Если функция f не равна 0 ни в одной точке области, принцип максимума модуля, примененный к функции $1/f$ дает принцип минимума модуля для f.

Формула Коши-Грина. Если f имеет непрерывные частные производные в замыкании компактной области D, справедлива формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\mathsf{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_{\mathsf{D}} \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

(здесь $\zeta = \xi + i\eta$). Для доказательства исключим из D малый круг $\bar{U}_r$ с центром в z и к функции $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ в области $\mathsf{D}_r = \mathsf{D}\setminus\bar{U}_r$ применим формулу Грина в комплексной записи $\displaystyle\oint_\gamma f(z)dz = 2i\iint_{\mathsf{G}} \frac{\partial f}{\partial\bar{z}}\,dxdy$. Будем иметь:

$$\oint_{\partial\mathsf{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \oint_{\partial U_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 2i\iint_{\mathsf{D}_r} \frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\,\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$$

Так как f непрерывна в z, во втором интеграле можно подставить $f(\zeta) = f(z) + O(r)$, где $O(r)\to 0$ при $r\to 0$. Поэтому

$$\oint_{\partial U_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 2\pi i f(z) + O(r)$$

и в пределе $r\to 0$ получаем формулу Коши-Грина.

8 Интегралы типа Коши и их граничные значения

Интегралом типа Коши называется интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

где f – некоторая (непрерывная) функция на кривой Γ. Кривая может быть как замкнутой, так и разомкнутой. Функция f называется плотностью, а функция $\dfrac{1}{\zeta - z}$ – *ядром Коши.*

Голоморфность интеграла типа Коши. Интеграл типа Коши является голоморфной функцией везде вне кривой Γ.

Теорема. *Интеграл типа Коши является голоморфной функцией в любой точке z, не лежащей на кривой Γ, причем*

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta$$

Доказательство. Заметим, что

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z - h)}$$

и

$$\sigma := \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2} \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{hf(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-h)}$$

Так как z не лежит на кривой Γ, всегда можно указать $\delta > 0$ такое, что замкнутый диск $|\zeta - z| \le \delta$ будет находиться на конечном расстоянии d от Γ. Пусть $|h| < \delta$. Очевидно, для всех точек $t \in \Gamma$ будем иметь $|t-z| > d$, $|t-z-h| > d$. Тогда

$$|\sigma| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\Gamma \frac{hf(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2(\zeta-z-h)}\right| < \frac{hLM}{2\pi d^3}$$

где L – длина кривой Γ, а $M = \max|f(t)|$ при $t \in \Gamma$. Поэтому предел $h \to 0$ существует и равен 0. ■

Интеграл в смысле главного значения. Чтобы изучить вопрос о граничных значениях интеграла типа Коши, надо выяснить смысл, который можно придать этому (расходящемуся в обычном понимании) интегралу, когда точка z лежит на контуре Γ.

Будем предполагать, что Γ – замкнутая гладкая кривая, точка $z_0 \in \Gamma$. Пусть γ – окружность $|z - z_0| = r$ некоторого малого радиуса r с центром в z_0. Часть кривой Γ, лежащую вне круга $|z - z_0| \le r$ обозначим через Γ_r. Интеграл

$$I_r = \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)dz}{z-z_0}$$

имеет смысл в обычном понимании. Если существует $\lim_{r\to 0} I_r = I$, то этот предел называется *интегралом в смысле главного значения* или особым интегралом типа Коши. Он существует при некоторых дополнительных предположениях относительно функции плотности.

Пусть в некоторой точке z_0 контура Γ функция f удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0 < \mu \le 1$:

- Существует постоянная M такая, что для всех точек $z \in \Gamma$, достаточно близких к z_0, имеет место
$$|f(z) - f(z_0)| \le M|z - z_0|^\mu$$

Очевидно, условие Гельдера сильнее, чем просто непрерывность.

Для существования интеграла в смысле главного значения при любом $z_0 \in \Gamma$ достаточно потребовать от функции f, чтобы она удовлетворяла условию Гельдера всюду на Γ. Действительно, перепишем наш интеграл в виде

$$\begin{aligned}
I_r = \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)dz}{z-z_0} &= \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + f(z_0)\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{z-z_0} \\
= \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz &+ f(z_0)\oint_{\Gamma_r\cup\gamma^+}\frac{dz}{z-z_0} - f(z_0)\int_{\gamma^+}\frac{dz}{z-z_0} \\
&= \int_{\Gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + 2\pi i f(z_0) - f(z_0)\int_{\gamma^+}\frac{dz}{z-z_0}
\end{aligned}$$

где γ^+ – часть окружности γ, лежащая вне конечной области, ограниченной кривой Γ. Из условия Гельдера следует, что $\left|\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \le \dfrac{M}{|z-z_0|^{1-\mu}}$. Поэтому существует сходящийся несобственный интеграл

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz = \lim_{r\to 0}\int_{\Gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

Кроме того,

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma^+} \frac{dz}{z-z_0} = i\lim_{r\to 0}\int_{\gamma^+} d\varphi = \pi i$$

В итоге имеем

$$\lim_{r\to 0} I_r = \oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \pi i f(z_0) + \oint_\Gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

В случае незамкнутого контура с концами a, b к этому выражению добавляется $f(z_0)\log\dfrac{b-z_0}{a-z_0}$.

Предельные значения интеграла типа Коши. Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма. *Пусть функция f удовлетворяет в точке $z_0 \in \Gamma$ условию Гельдера, и точка z стремится к z_0 так, что отношение $h = |z-z_0|$ к d (кратчайшему расстоянию z от точек Γ) остается ограниченным. Тогда*

$$\lim_{z\to z_0}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta-z}\,d\zeta = \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta-z_0}\,d\zeta$$

Доказательство. Оценим разность между интегралами в левой и правой частях:

$$\Delta = (z-z_0)\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)-f(z_0)}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}\,d\zeta = \Delta_1+\Delta_2$$

Разобьем интеграл на два, из которых первый идет по дуге c кривой Γ, для точек которой $|\zeta-z_0| \le \delta$ (выбор δ будет сделан позднее), а второй – по оставшейся части $\Gamma' = \Gamma \setminus c$. Оценка первого интеграла:

$$|\Delta_1| \le \int_c \frac{hM|\zeta-z_0|^\mu}{d|\zeta-z_0|}\,|d\zeta| = \frac{hM}{d}\int_c \frac{|d\zeta|}{|\zeta-z_0|^{1-\mu}}$$

Обозначим через $t = |\zeta-z_0|$ длину хорды, стягивающей дугу $z_0\zeta$ кривой Γ. Отношение длины дуги к длине стягивающей ее хорды ограничено, т.е. $|d\zeta| \le A dt$, и тогда

$$|\Delta_1| \le 2\frac{hMA}{d}\int_0^\delta \frac{dt}{t^{1-\mu}} = \mathrm{const}\cdot\delta^\mu$$

Отсюда видно, что δ можно выбрать столь малым, чтобы $|\Delta_1|$ не превосходила любого наперед заданного $\varepsilon/2$.

Для $\zeta \in \Gamma \setminus c$ имеем $|\zeta - z_0| \geq \delta$. В предположении, что $|z - z_0| < \delta/2$, получим $|\zeta - z| \geq \delta/2$. Отсюда

$$|\Delta_2| < C\frac{|z - z_0|}{\delta^2}$$

где постоянная C не зависит от z_0 и z. Видим, что для достаточно малых $|z - z_0|$ величина $|\Delta_2|$ также не будет превосходить $\varepsilon/2$. ■

Фиксируем точку $z_0 \in \Gamma$ и перепишем интеграл типа Коши в виде:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{f(z_0)}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

В силу интегральной формулы Коши

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z}\,d\zeta + f(z_0), & z \in \mathsf{D} \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z}\,d\zeta, & z \in \mathbb{C} \setminus \mathsf{D} \end{cases}$$

где D – конечная область, ограниченная кривой Γ. Из леммы следует, что при $z \to z_0$ интеграл в правой части стремится к $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0}\,d\zeta$. Сравнивая с формулами для интеграла в смысле главного значения (особого интеграла типа Коши), получаем формулы Сохоцкого-Племеля

$$F^{\pm}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_0} \pm \frac{1}{2}f(z_0)$$

которые выражают граничные значения интеграла типа Коши при стремлении точки z к граничной точке z_0 изнутри (знак $+$) и снаружи (знак $-$). Из них следует, что функция $F(z)$ имеет на контуре Γ скачок

$$F^{+}(z_0) - F^{-}(z_0) = f(z_0)$$

равный функции плотности в данной точке контура.

9 Ряды Тейлора

Числовые и функциональные ряды (напоминание). Ряд из комплексных чисел $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ имеет конечный предел S; этот предел называется суммой ряда.

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(z)$, где функции $u_n(z)$ определены на некотором множестве $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется *равномерно сходящимся* на E, если он сходится в каждой точке $z \in E$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geq N$

и всех $z \in E$ $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)\right| < \varepsilon$. В этом определении важно то, что N зависит только от ε, но не от z.

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости (достаточный, но не необходимый): если всюду в D члены функционального ряда могут быть мажорированы членами абсолютно сходящегося числового ряда, то ряд сходится равномерно в D. В приложениях в качестве мажорирующего ряда обычно выступает геометрическая прогрессия.

Точно так же, как в вещественном анализе доказывается, что сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных на D функций непрерывна на D и что равномерно сходящийся ряд из непрерывных функций можно почленно интегрировать.

Степенные ряды. В ТФКП особую роль играют степенные ряды.

Теорема (Абель). *Если степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *сходится в точке* z_0, *то он абсолютно сходится в круге* $K_0 = \{|z-a| < |z_0-a|\}$, *а в круге* $K_1 = \{|z-a| \le \rho\}$, *где* $\rho < |z_0 - a|$, *он сходится равномерно.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $a = 0$. В силу сходимости ряда $\sum c_n z^n$ в точке z_0 имеем $|c_n z_0^n| < M$ при всех n. Пусть $z \in K_0$, тогда $|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < Mq^n$, где $q = |z/z_0| < 1$. Пусть $z \in K_1$, тогда $|c_n z^n| \le M|z/z_0|^n \le Mq_1^n$, где $q_1 = \rho/|z_0|$ не зависит от z, и по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно в K_1. ■

Теорема (Коши-Адамар). *Пусть дан степенной ряд* $\sum c_n(z-a)^n$, *и*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$$

где $0 \le R \le \infty$ [1]. *Тогда в круге* $|z-a| < R$ *ряд сходится, а при* $|z-a| > R$ *расходится.*

Доказательство. Опять кладем $a = 0$. Рассмотрим случай $R \ne 0, \infty$.

По определению верхнего предела (свойство 2)) для любого $\varepsilon > 0$ можно найти N такое, что при $n \ge N$ имеем $\sqrt[n]{|c_n|} < \dfrac{1+\varepsilon}{R}$ и, следовательно,

$$|c_n z^n| < \left(\frac{1+\varepsilon}{R}\,|z|\right)^n$$

Если $|z| < R$, можно взять ε столь малое, что $\frac{1+\varepsilon}{R}|z| = q < 1$, так что члены ряда мажорируются сходящейся геометрической прогрессией.

Из условия 1) в определении верхнего предела следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти последовательность $n_k \to \infty$ такую, что $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > \dfrac{1-\varepsilon}{R}$ и, следова-

[1] Верхним пределом последовательности a_n вещественных чисел называется число A такое, что 1) существует подпоследовательность $a_{n_k} \to A$, 2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что $a_n < A + \varepsilon$ для всех $n \ge N$

тельно,

$$|c_{n_k} z^{n_k}| > \left(\frac{1-\varepsilon}{R}\,|z|\right)^{n_k}$$

Если $|z| > R$, можно взять ε столь малое, что $\frac{1-\varepsilon}{R}\,|z| > 1$, тогда $|c_{n_k} z^{n_k}| > 1$, т.е. общий член ряда не стремится к 0, и ряд расходится. ■

Примеры рядов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ $(R = \infty)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ $(R = 1)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ $(R = 0)$.

При $|z| = R$ ряд может как сходиться, так и расходиться. Примеры: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ (расходится при всех $|z| = 1$), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ (при $z = -1$ сходится, при $z = 1$ расходится), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ (сходится при $|z| = 1$).

Ряды Тейлора. Голоморфные функции можно разлагать в ряд Тейлора.

Теорема. *Пусть функция f голоморфна в области D и $a \in \mathsf{D}$ – произвольная точка. Тогда в любом круге $U_R = \{|z - a| < R\} \subset \mathsf{D}$ эта функция равна сумме сходящегося степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

Доказательство. Пусть $z \in U_R$ – произвольная точка; выберем число r так, чтобы $|z - a| < r < R$. Обозначим через γ_r окружность радиуса r с центром в a. Из интегральной формулы Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Разложим ядро Коши в этой формуле:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z-a}{\zeta-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

Так как для всех $\zeta \in \gamma_r$ имеем $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$, прогрессия сходится абсолютно и равномерно по ζ на γ_r. Умножим обе части на $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ (эта функция ограничена, поэтому равномерная сходимость не нарушится) и почленно проинтегрируем по γ_r. Получим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

Интеграл по γ_r не зависит от r (при $0 < r < R$). ■

Построенный степенной ряд называется рядом Тейлора функции f с центром в a.

Отметим простые, но важные следствия доказанной теоремы.

Следствие (неравенства Коши). *Пусть f голоморфна в замкнутом круге $\bar{U} = \{|z-a| \leq r$ и на окружности $\gamma_r = \partial U$ ее модуль $\leq M$. Тогда коэффициенты ряда Тейлора с центром в a удовлетворяют неравенствам*

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Следствие (теорема Лиувилля). *Если функция голоморфна в $\mathbb{C}$ и ограничена, то она постоянна.*

Доказательство. По доказанному выше в любом замкнутом круге $\bar{U} = \{|z| \leq r\}$ функция f представляется сходящимся рядом Тейлора $\sum c_n z^n$, коэффициенты которого не зависят от r. Т.к. f ограничена (пусть $|f| \leq M$), по неравенствам Коши имеем $|c_n| \leq M/r^n$. Здесь r может быть сколь угодно велико, поэтому при $n \geq 1$ правая часть стремится к 0 при $r \to \infty$. Но левая часть не зависит от r, откуда заключаем, что $c_n = 0$ при $n \geq 1$, т.е. $f(z) = c_0 = \mathrm{const}$. ■

Вариант формулировки: если функция голоморфна в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, то она постоянна.

Мы показали, что голоморфные функции можно разлагать в сходящийся ряд Тейлора. Теперь покажем, что, и обратно, сумма любого сходящегося степенного ряда является голоморфной функцией.

Теорема. *Сумма степенного ряда $f(z) = \sum c_n (z-a)^n$ голоморфна в круге его сходимости. При этом производная $f'(z)$ является суммой ряда, полученного почленным дифференцированием ряда для $f(z)$.*

Доказательство. Пусть радиус сходимости нашего ряда равен $R > 0$. Составим ряд из производных

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$$

Его радиус сходимости тоже равен R. На компактных подмножествах круга сходимости U_R он сходится равномерно, следовательно, функция φ непрерывна в этом круге. По той же причине ряд можно почленно интегрировать по границе любого треугольника $\Delta \subset U_R$:

$$\oint_{\partial\Delta} \varphi dz = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \oint_{\partial\Delta} (z-a)^{n-1} dz = 0$$

По доказанной ранее теореме функция

$$\int_{[a,z]} \varphi(\zeta) d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \int_{[a,z]} (z-a)^{n-1} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

в каждой точке имеет производную, равную $\varphi(z)$. Но тогда и функция $f(z) = c_0 + \int_{[a,z]} \varphi(\zeta) d\zeta$ в каждой точке имеет производную $f'(z) = \varphi(z)$. ■

Из этой теоремы вытекает, что голоморфная функция $f(z) = \sum c_n(z-a)^n$ имеет голоморфные производные всех порядков, ряды для которых получаются многократным дифференцированием ряда для f. Продифференцировав ряд n раз и положив $z = a$, получим

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Сравнив с ранее найденной интегральной формулой для коэффициентов, будем иметь:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial \mathsf{D}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

Теорема (Морера). *Если функция f непрерывна в области D, и интеграл от нее по границе любого треугольника, компактно принадлежащего D, равен 0, то f голоморфна в D.*

Доказательство. Достаточно доказать голоморфность в произвольном круге $U \subset \mathsf{D}$. По теореме о существовании первообразной, f имеет в U первообразную F. Но как мы теперь знаем, производная голоморфной функции F сама голоморфна. ∎

Три эквивалентных определения голоморфной функции. Каждое из следующих условий эквивалентно голоморфности функции f в точке a:

(1) Функция f является $\mathbb{C}$-дифференцируемой в некоторой окрестности точки a;

(2) Функция f аналитична в точке a, т.е. разлагается в степенной ряд с центром в точке a, сходящийся в некоторой окрестности точки a;

(3) Функция f непрерывна в некоторой окрестности U точки a и интеграл по границе любого треугольника в U равен 0.

(1) $\Longrightarrow$ (2): Теорема о разложении в ряд Тейлора;

(2) $\Longrightarrow$ (1): Теорема о голоморфности суммы степенного ряда;

(1) $\Longrightarrow$ (3): Интегральная теорема Коши;

(3) $\Longrightarrow$ (1): Теорема Мореры.

Теорема Вейерштрасса. Теорема Вейерштрасса показывает, что множество голоморфных функций замкнуто относительно равномерного предела.

Теорема (Вейерштрасс). *Пусть функции $f_n(z)$ голоморфны в области D, и ряд $f(z) = \sum f_n(z)$ равномерно сходится на любом компакте, лежащем в D. Тогда f голоморфна, и $f'(z) = \sum f_n'(z)$.*

Доказательство. Для произвольной точки $a \in \mathsf{D}$ рассмотрим замкнутый диск $\bar{U}_R$ с центром в a. Если $\gamma \in \bar{U}_R$ – граница треугольника, то ввиду равномерной сходимости

$$\oint_\gamma f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_\gamma f_n(z) dz = 0$$

и по теореме Мореры f голоморфна в $\bar{U}_R$. Кроме того,

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial U_R}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial U_R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(z)\,dz}{(z-a)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial U_R}\frac{f_n(z)\,dz}{(z-a)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}f_n'(a)$$

■

10 Теорема единственности

Точка a называется нулем функции f (голоморфной в этой точке), если $f(a) = 0$. Изучим поведение функции в окрестности ее нуля.

Лемма. *Если точка a является нулем голоморфной в этой точке функции f, не равной тождественно нулю ни в какой окрестности a, то существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f(z) = (z-a)^n\phi(z)$, где функция ϕ голоморфна в a и отлична от 0 в некоторой окрестности этой точки.*

Доказательство. Рассмотрим разложение функции в ряд Тейлора в окрестности точки a: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Поскольку $f(a) = 0$, $c_0 = 0$, но все коэффициенты ряда не могут быть равными 0, ибо тогда $f \equiv 0$ в некоторой окрестности a. Пусть c_n – первый отличный от 0 коэффициент. Обозначим $\phi(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + \ldots$. Этот ряд сходится в некоторой окрестности точки a и представляет голоморфную функцию такую, что $\phi(a) = c_n \neq 0$. В силу непрерывности этой функции $\phi \neq 0$ в некоторой окрестности. ■

Тем самым всегда существует окрестность точки a, в которой нет нулей отличных от a, т.е. нули голоморфных функций изолированы. Число n называется порядком нуля.

Теорема (единственности). *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D, и $f(z_n) = 0$ где $\{z_n\}$ – последовательность различных точек из D такая, что $\lim_{n\to\infty} z_n = a$, $a \in \mathsf{D}$. Тогда $f(z) \equiv 0$ в D.*

Доказательство. Разложим функцию f в ряд Тейлора по степеням $z - a$ и покажем, что все его коэффициенты равны 0. Допустим противное, тогда существует окрестность точки a такая, что $f(z) \neq 0$ при $z \neq a$. А это противоречит условию теоремы. Значит, все коэффициенты ряда равны 0. Ряд сходится в круге $K : |z - a| < \rho_0$, где ρ_0 – расстояние от точки a до границы области. Таким образом, $f(z) \equiv 0$ в круге K.

Теперь покажем, что функция f равна 0 в любой точке области D. Для этого возьмем любую точку $\zeta \in \mathsf{D}$ и соединим ее с точкой a ломаной, лежащей в D. Допустим, что $f(\zeta) \neq 0$. Тогда на ломаной найдется точка a' со следующими свойствами:

а) На участке ломаной между a и a' функция f равна 0;

б) В круге $|z - a'| < \rho$ при любом $\rho > 0$ найдется хотя бы одна точка, в которой $f \neq 0$.

Тогда мы можем взять последовательность точек z'_n ломаной, для которых $z'_n \to a'$ и $f(z'_n) = 0$ и повторить приведенное выше рассуждение. Мы получим, что $f(z) = 0$ в некотором круге $|z - a'| < r$. Это противоречит второму свойству точки a'. ■

Пример: функция $\sin(1/z)$ имеет нули в точках $z_n = 1/\pi n$, и $\lim z_n = 0$, но $f(z)$ не тождественный ноль. Этот пример не противоречит теореме, т.к. предельная точка 0 не принадлежит области голоморфности функции.

Другая формулировка теоремы единственности: Пусть функции f, g голоморфны в области D и совпадают на множестве E, которое содержится в D и имеет предельную точку $a \in \mathsf{D}$. Тогда $f \equiv g$ в D.

11 Ряды Лорана

Ряды Тейлора представляют голоморфные функции в кругах. Более общие ряды по положительным и отрицательным степеням (ряды Лорана) представляют голоморфные функции в концентрических кольцах.

Теорема. *Любую функцию, голоморфную в кольце $V = \{r < |z-a| < R\}$, можно представить как сумму сходящегося ряда*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

где $r < \rho < R$.

Доказательство. Фиксируем $z \in V$ и построим кольцо $V' = \{\zeta : r' < |\zeta - a| < R'$ такое, что $z \in V' \subset V$. Имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

где $\Gamma' = \{|\zeta - a| = R'\}$, $\gamma' = \{|\zeta - a| = r'\}$.

На Γ' $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < 1$, поэтому геометрическая прогрессия

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a)\left(1 - \frac{z-a}{\zeta-a}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

сходится абсолютно и равномерно по ζ. Умножая ее на ограниченную функцию $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ (что не нарушает равномерной сходимости) и интегрируя по Γ', получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma'} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}$$

На γ' $\left|\frac{\zeta-a}{z-a}\right| < 1$, поэтому геометрическая прогрессия

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \frac{\zeta-a}{z-a}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$$

сходится абсолютно и равномерно по ζ. Умножая ее на ограниченную функцию $\frac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ и интегрируя по γ', получаем

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma'} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma'} f(\zeta)(\zeta-a)^{-n-1} d\zeta \quad (n<0)$$

Складывая результаты, получаем ряд Лорана. Заметим еще, что в интегралах для коэффициентов окружности Γ' и γ' можно заменить любой окружностью $|\zeta - a| = \rho$ с $r < \rho < R$. ∎

Совокупность членов ряда Лорана с неотрицательными степенями называется его регулярной частью, а с отрицательными – главной частью. Сходимость ряда Лорана означает по определению, что сходятся ряды, представляющие его регулярную и главную части.

Радиус сходимости регулярной части: $R = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n}\right)^{-1}$.

Радиус сходимости главной части: $r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_{-n}}$.

Область сходимости ряда Лорана – круговое кольцо $r < |z-a| < R$.

Теорема. *Если функция f в кольце V представима рядом Лорана, то его коэффициенты определяются по формулам*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Иными словами, всякий сходящийся ряд по целым степеням $z-a$ является рядом Лорана своей суммы.

Доказательство. На окружности γ_ρ ряд Лорана $f(z) = \sum c_k (z-a)^k$ сходится равномерно, и это свойство сохранится после умножения обеих частей на $(z-a)^{-n-1}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^{k-n-1} = \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$$

Интегрируем почленно по γ_ρ:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{\gamma_\rho} (z-a)^{k-n-1} dz = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}$$

откуда $2\pi i c_n = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}$. ∎

Неравенства Коши обобщаются для рядов Лорана следующим образом. Пусть функция f голоморфна в кольце V и на окружности γ_ρ ее модуль $\le M$. Тогда

$$|c_n| \le \frac{M}{\rho^n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

12 Изолированные особые точки

Точка a называется *изолированной особой точкой* функции f, если существует такая проколотая окрестность этой точки, в которой f голоморфна.

Изолированная особая точка a функции f называется

(i) *устранимой особой точкой*, если существует конечный $\lim_{z\to a} f(z) = A$;

(ii) *полюсом*, если $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$;

(iii) *существенно особой точкой*, если f не имеет предела при $z \to a$.

Примеры: $\dfrac{\sin z}{z}$, $1/z$, $e^{1/z}$.

Теорема. *Для функции f, голоморфной в проколотой окрестности точки a, следующие утверждения эквивалентны:*

(1) a – устранимая особая точка;

(2) f ограничена в некоторой проколотой окрестности точки a;

(3) коэффициенты Лорана $c_n = 0$ при $n < 0$;

(4) можно доопределить функцию при $z = a$ таким образом, чтобы она стала голоморфной во всей окрестности точки a.

<u>Доказательство</u>. (1) $\Longrightarrow$ (2): очевидно.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Если $|f(z)| \le M$ при $0 < |z-a| < \varepsilon'$, то согласно неравенствам Коши $|c_{-k}| \le M\rho^k$ при всех $k \ge 1$ и всех $0 < \rho < \varepsilon'$. При $\rho \to 0$ получаем $c_{-k} = 0$.

(3) $\Longrightarrow$ (4): По условию имеем $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ при $0 < |z-a| < \varepsilon$. Если положить $f(a) = c_0$, это будет верно при всех $|z-a| < \varepsilon$. Тогда функция голоморфна во всей окрестности.

(4) $\Longrightarrow$ (1): очевидно. ∎

Теорема. *Изолированная особая точка a функции f является полюсом в том и только том случае, когда главная часть разложения в точке a содержит лишь конечное (но ненулевое) число отличных от нуля членов.*

<u>Необходимость</u>. Пусть a – полюс; т.к. $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, существует проколотая окрестность точки a, в которой $f \ne 0$. В этой окрестности голоморфна $g(z) = 1/f(z)$, причем $\lim_{z\to a} g(z) = 0$. Следовательно, a является устранимой особенностью (нулем) для g, и в нашей окрестности справедливо разложение

$$g(z) = b_N(z-a)^N + b_{N+1}(z-a)^{N+1} + \dots\ , \quad b_N \ne 0$$

Но тогда в той же окрестности

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^N}\,\frac{1}{b_N + b_{N+1}(z-a) + \dots}$$

Второй множитель является функцией, голоморфной в точке a и допускает разложение в ряд Тейлора

$$\frac{1}{b_N + b_{N+1}(z-a)+\dots} = c_{-N} + c_{-N+1}(z-a)+\dots\ , \quad c_{-N} = \frac{1}{b_N} \neq 0$$

Поэтому

$$f(z) = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \frac{c_{-N+1}}{(z-a)^{N-1}} + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

т.е. главная часть содержит лишь конечное число членов.

Достаточность. Пусть f в проколотой окрестности представляется лорановским разложением, главная часть которого конечна, как выше. Пусть $c_{-N} \neq 0$. Тогда f голоморфна в этой окрестности, так же, как и $\varphi(z) = (z-a)^N f(z)$, причем $\varphi(a) \neq 0$. Следовательно, $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \lim\limits_{z\to a} \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^N} = \infty$. ■

Число N называется порядком полюса.

Из данного выше описания особенностей вытекает характеристика существенно особых точек в терминах рядов Лорана: их главная часть в разложении вокруг существенно особой точки содержит бесконечно много членов.

Теорема (Сохоцкий). *Если a является существенно особой точкой функции f, то для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ найдется последовательность точек $z_n \to a$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.*

Доказательство. Пусть сначала $A = \infty$. Как следует из описания устранимых особенностей, f не может быть ограниченной ни в какой проколотой окрестности точки a (иначе особенность была бы устранимой). Поэтому найдется последовательность $z_n \to a$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$.

Пусть теперь $A \neq \infty$. Если в любой проколотой окрестности точки a найдется точка z с $f(z) = A$, то утверждение очевидно. Если это не так, то функция $g(z) := \dfrac{1}{f(z)-A}$ имеет при $z = a$ изолированную особенность. Она не может быть полюсом или устранимой особенностью, т.к. в обоих случаях функция $f(z) = A + \dfrac{1}{g(z)}$ имела бы предел при $z \to a$. Значит, a – существенно особая точка для $g(z)$. Но тогда, согласно первой части доказательства, найдется последовательность $z_n \to a$ такая, что $g(z_n) \to \infty$ при $n \to \infty$. А это значит, что $f(z_n) = A + \dfrac{1}{g(z_n)} \to A$. ■

Целой называется функция, голоморфная во всей плоскости $\mathbb{C}$, т.е. не имеющая конечных особых точек. Если ∞ – устранимая особенность целой функции f, то $f = \mathrm{const}$. Если это полюс, то главная часть лорановского разложения представлет собой полином. Вычитая из f эту главную часть, получим целую функцию с устранимой особенностью в ∞, т.е. константу. Следовательно, целая функция с полюсом в ∞ является полиномом. Целые функции с существенной особенностью в бесконечности (например, e^z) называются *целыми трансцендентными.*

Функция, не имеющая в $\mathbb{C}$ других особенностей, кроме полюсов, называется *мероморфной.* Целые функции составляют подкласс класса мероморфных функций (они вовсе не имеют полюсов в $\mathbb{C}$). Мероморфная функция не может иметь более чем счетное число полюсов. В самом деле, в каждом круге $|z| < n$ может лежать лишь конечное число полюсов (иначе существовала бы их конечная предельная точка, которая является неизолированной особенностью, а не полюсом), и все полюсы можно пересчитать. Пример: $f(z) = \operatorname{tg} z$.

Если мероморфная функция f имеет в ∞ устранимую особенность или полюс, то она является рациональной функцией. В самом деле, число полюсов функции f конечно, ибо иначе в силу компактности $\overline{\mathbb{C}}$ существовала бы предельная точка полюсов, которая является неизолированной особенностью, а не полюсом. Вычтем из f сумму главных частей лорановских разложений в окрестности всех полюсов. Полученная таким образом функция не имеет других особенностей кроме устранимых и потому равна константе. Следовательно, f является рациональной функцией.

13 Вычеты

Пусть функция f голоморфна в проколотой окрестности V точки a, $V = \{0 < |z-a| < \varepsilon\}$. *Вычетом* функции f в изолированной особой точке a называется число

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} f(z)dz\,, \quad 0 < r < \varepsilon.$$

По теореме Коши о гомотопии оно не зависит от r.

Теорема Коши о вычетах. *Пусть* D – *область с простой границей и* G – *некоторая область, содержащая замыкание области* D. *Если* f *голоморфна в* G *за исключением конечного числа изолированных особых точек* $a_1, \ldots, a_n \in \mathsf{D}$, *то*

$$\oint_{\partial \mathsf{D}} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}_{a_j} f$$

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы круги $B_j = \{|z-a_j| < \varepsilon\}$ не пересекались, а их замыкания содержались в D. Тогда

$$0 = \oint_{\partial \mathsf{D}} f(z)dz - \sum_j \oint_{\partial B_j} f(z)dz = \oint_{\partial \mathsf{D}} f(z)dz - \sum_j 2\pi i \operatorname{res}_{a_j} f$$

■

Предложение. *Если функция* $\sum c_n(z-a)^n$ *голоморфна в проколотой окрестности* $V = \{0 < |z-a| < \varepsilon\}$ *точки* a, *то* $res_a f = c_{-1}$.

Доказательство. Пользуясь равномерной сходимостью ряда Лорана для f на окружности $|z-a| = r$, $0 < r < \varepsilon$, имеем:

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=r} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_n c_n \oint_{|z-a|=r} (z-a)^n dz = c_{-1}$$

■

Вычет в простом полюсе находится очень легко:

$$c_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

Особенно удобна небольшая модификация этой формулы. Пусть $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где φ и ψ голоморфны, причем $\varphi(a) \neq 0$, и $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$. Тогда

$$c_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

Для вычета в полюсе n-го порядка имеем формулу

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big[(z-a)^n f(z)\Big]$$

Понятие вычета можно ввести и для точки ∞. Пусть функция f имеет ∞ своей изолированной особой точкой, тогда

$$\mathrm{res}_\infty f = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_R^-} f dz$$

где γ_R^- – окружность, проходимая по часовой стрелке. Очевидно, $\mathrm{res}_\infty f = -c_{-1}$. В отличие от конечных точек вычет в ∞ может быть не равен 0 и в том случае, когда ∞ является правильной точкой функции.

Теорема о сумме вычетов. *Пусть функция f голоморфна всюду в плоскости $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа точек a_ν, тогда*

$$\sum_{\nu=1}^{n}\mathrm{res}_{a_\nu} f + \mathrm{res}_\infty f = 0$$

Доказательство. Возьмем окружность радиуса R столь большого, что она содержит внутри себя все конечные особые точки a_ν. По теореме Коши о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_R} f dz = \sum_{\nu=1}^{n}\mathrm{res}_{a_\nu} f$$

Величина в левой части не меняется при дальнейшем увеличении R и равна вычету в ∞ со знаком минус. ∎

Примеры вычисления интегралов. Вычеты помогают вычислять многие определенные интегралы.

1) Интегралы вида $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$. Сводятся к интегралу по единичной окружности с помощью замены $e^{ix} = z$. Например:

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-2a\cos x + a^2} = \oint_{|z|=1}\frac{idz}{az^2-(a^2+1)z+a}$$

Нули знаменателя – a и $1/a$, допустим, что $|a| < 1$, тогда вклад в интеграл дает вычет в $z = a$; ответ: $I = 2\pi/(1-a^2)$.

2) Интегралы от рациональных функций вида $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$. К ним теорема о вычетах непосредственно не применима, т.к. контур не замкнутый. Рассмотрим вспомогательный замкнутый контур Γ_R, состоящий из отрезка $[-R, R]$ и полуокружности $\gamma_R = \{|z| = R, \operatorname{Im} z > 0\}$. Если интеграл по γ_R стремится к 0 при $R \to \infty$, в пределе получаем, что искомый интеграл дается вычетами подынтегрального выражения в полюсах в верхней полуплоскости. Например:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\oint_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z+i)(z-i)} = \frac{\pi}{2}$$

3) Интегралы вида $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}R(x)dx$. Используем тот же вспомогательный контур Γ_R. Для доказательства, что интеграл по γ_R стремится к 0, используется лемма Жордана.

Лемма (Жордан). *Пусть функция f определена в верхней полуплоскости; положим $M(R) = \max_{\gamma_R} |f(z)|$, где γ_R – полуокружность радиуса R в верхней полуплоскости. Предположим, что f стремится к 0 на бесконечности так, что $\lim\limits_{R\to\infty} M(R) = 0$. Тогда для любого $t > 0$*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)e^{itz}dz = 0$$

Доказательство. Имеем:

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)e^{itz}dz\right| = \left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})e^{-tR\sin\theta + itR\cos\theta}Re^{i\theta}d\theta\right| \le M(R)R\int_0^{\pi} e^{-tR\sin\theta}d\theta$$

Для оценки последнего интеграла заметим, что $\sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta$ при $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\int_0^{\pi} e^{-tR\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-tR\sin\theta}d\theta \le 2\int_0^{\pi/2} e^{-2tR\theta/\pi}d\theta = \frac{\pi}{tR}(1 - e^{-tR})$$

Пользуясь тем, что $M(R) \to 0$, получаем утверждение леммы. ■

Например:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx\, dx}{x^2+1} = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}\, dx}{x^2+1} = \lim_{R\to\infty} \operatorname{Re}\oint_{\Gamma_R} \frac{e^{ikz}\, dz}{(z+i)(z-i)} = \pi e^{-k}$$

(мы считаем $k > 0$).

14 Лемма Шварца

Лемма (Шварц). *Пусть функция f голоморфна в единичном круге $U = \{|z| \le 1\}$, $|f(z)| \le 1$ для всех $z \in U$ и $f(0) = 0$. Тогда для всех $z \in U$*

$$|f(z)| \le |z|$$

причем если равенство достигается хотя бы в одной точке $z \neq 0$, то оно справедливо всюду в U, и в этом случае $f(z) = e^{i\alpha}z$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi(z) = f(z)/z$. В силу условия $f(z) = 0$ она голоморфна в U. Возьмем произвольный круг $U_r = \{|z| < r\}$ $(r < 1)$. По принципу максимума модуля функция $|\varphi|$ достигает максимума на его границе. Но на границе имеем $|\varphi(z)| \leq 1/r$ (ибо $|f(z)| \leq 1$), поэтому всюду в U_r

$$|\varphi(z)| \leq \frac{1}{r}$$

Фиксируем z и устремим $r \to 1$. В пределе получим $|\varphi(z)| \leq 1$, т.е. $|f(z)| \leq |z|$. Если в какой-либо точке достигается равенство, то $|\varphi|$ достигает в ней максимального значения, равного 1. Тогда φ является постоянной, модуль которой равен 1. ■

Из леммы Шварца следует, что при голоморфном отображении круга $\{|z| < 1\}$ в круг $\{|w| < 1\}$, переводящем центр в центр, образ любой окружности $|z| = r$ лежит внутри круга $\{|w| < r\}$.

Лемма Шварца допускает следующее обобщение. Положим

$$\rho(z_1, z_2) = \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2}\right|$$

Пусть функция f голоморфна в единичном круге U и $|f(z)| \leq 1$ для всех $z \in U$. Тогда $\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2)$ для всех z_1, z_2, причем если для каких-то $z_1 \neq z_2$ достигается равенство, то функция f дробно-линейна.

Лемма Шварца позволяет доказать, что автоморфизмы единичного круга U исчерпываются дробно-линейными преобразованиями

$$z \mapsto e^{i\alpha}\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad a \in U$$

Пусть φ – произвольный автоморфизм U, обозначим $\varphi(0) = a$ и построим дробно-линейный автоморфизм

$$\psi(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

переводящий точку a в 0. Композиция $f = \psi \circ \varphi$ – тоже автоморфизм U, причем $f(0) = 0$. Так как, кроме того, $|f(z)| < 1$ для всех $z \in U$, то к функции f применима лемма Шварца, по которой $|f(z)| \leq |z|$ для всех $z \in U$. Но и обратное к f отображение g тоже удовлетворяет условиям той же леммы, поэтому $|g(w)| \leq |w|$. Полагая здесь $w = f(z)$, находим $|z| \leq |f(z)|$. Таким образом, имеем $|f(z)| = |z|$ для всех $z \in U$, откуда (опять же по лемме Шварца) $f(z) = e^{i\alpha}z$.

15 Принцип аргумента

Логарифмический вычет. Логарифмическим вычетом функции f в точке a называется вычет ее логарифмической производной f'/f в этой точке.

Пусть a – нуль функции f порядка n, т.е. в некоторой окрестности U точки a $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$, где φ голоморфна в U и не равна там 0. Тогда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z-a)^{n-1}\varphi(z) + (z-a)^n \varphi'(z)}{(z-a)^n \varphi(z)} = \frac{n}{z-a} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$$

Второе слагаемое голоморфно в a. Видим, что логарифмический вычет в нуле равен порядку этого нуля.

Если a – полюс порядка p, $1/f$ имеет в этой точке нуль порядка p, а так как

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{d}{dz} \log \frac{1}{f(z)}$$

логарифмический вычет в полюсе порядка p равен $-p$.

Теорема. *Пусть функция f мероморфна в области D и $\mathsf{G} \subset \mathsf{D}$ – область, граница которой является простой непрерывной кривой. Пусть $\partial\mathsf{G}$ не содержит ни нулей, ни полюсов f. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathsf{G}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N - P$$

где N и P – соответственно общее число нулей и полюсов функции f в G (с учетом их кратностей).

Доказательство состоит в применении теоремы Коши о вычетах к области G и функции f'/f. ■

Принцип аргумента. Предыдущей теореме можно придать геометрический смысл. Представим $\partial\mathsf{G}$ путем $z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathsf{G}} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\Big[\log f(z(\beta)) - \log f(z(\alpha))\Big]$$

где log означает любую ветвь логарифма, непрерывно меняющуюся вдоль пути. Так как $\log f = \log|f| + i\arg f$, и функция $\log|f|$ однозначна, достаточно выделить ветвь $\arg f$, непрерывно меняющуюся вдоль пути. Обозначив приращение выделенной ветви аргумента при обходе области через $\Delta_{\partial\mathsf{G}}\arg f$, будем иметь

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\, \Delta_{\partial\mathsf{G}} \arg f$$

Правая часть представляет собой полное число оборотов вокруг точки $w = 0$, которые сделает вектор $w = f(z)$ когда z обходит $\partial\mathsf{G}$.

Вместо нулей функции f можно рассматривать ее a-точки, т.е. корни уравнения $f(z) = a$. Если $\partial\mathsf{G}$ не содержит a-точек и полюсов функции f, имеем:

$$N_a - P = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathsf{G}} \frac{f'(z)}{f(z)-a}\, dz = \frac{1}{2\pi}\, \Delta_{\partial\mathsf{G}} \arg\big(f(z) - a\big)$$

Теорема Руше. Пример применения принципа аргумента дает теорема Руше.

Теорема (Руше). *Пусть функции f и g голоморфны в замкнутой области $\bar{\mathsf{G}}$ с непрерывной границей $\partial\mathsf{G}$ и пусть*

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \text{для всех } z \in \partial\mathsf{G}$$

Тогда функции f и $f+g$ имеют в G одинаковое количество нулей.

Доказательство. Из условия следует, что f и $f+g$ не равны 0 на $\partial\mathsf{G}$ [2]; следовательно, к ним применим принцип аргумента. Имеем:

$$\Delta_{\partial\mathsf{G}} \arg(f+g) = \Delta_{\partial\mathsf{G}} \arg f + \Delta_{\partial\mathsf{G}} \arg\Big(1 + \frac{g}{f}\Big)$$

Но так как $|g/f| < 1$ на $\partial\mathsf{G}$, при любом движении $z \in \partial\mathsf{G}$ точка $\omega = g/f$ не выходит за пределы круга $|\omega| < 1$. Поэтому вектор $w = 1+\omega$ не может сделать хотя бы один оборот вокруг нуля, и второе слагаемое равно 0. Таким образом,

$$\Delta_{\partial\mathsf{G}} \arg(f+g) = \Delta_{\partial\mathsf{G}} \arg f$$

откуда по принципу аргумента следует утверждение теоремы. ■

С помощью теоремы Руше можно дать простое доказательство основной теоремы алгебры, что многочлен степени n имеет в $\mathbb{C}$ ровно n корней. Представим произвольный многочлен $P_n = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ как $f+g$, где $f = a_n z^n$, $g = a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$ и применим теорему Руше к паре f, g и контуру $|z| = R$ при достаточно большом R.

Теорема Гурвица. Следствием теоремы Руше является теорема Гурвица.

Теорема (Гурвиц). *Пусть последовательность функций f_n, голоморфных в области D, сходится равномерно на компактах в D к функции $f \neq \mathrm{const}$, и пусть точка $z_0 \in \mathsf{D}$ является нулем функции f, т.е. $f(z_0) = 0$. Тогда в любом лежащем в D круге $|z - z_0| < r$ все функции f_n, начиная с некоторой, тоже имеют нуль.*

Доказательство. По теореме Вейерштрасса предельная функция голоморфна в D. Достаточно доказать теорему лишь для малых кругов с центром z_0. Будем считать, что круг $U = \{|z - z_0| < r\}$ компактно принадлежит D и в $\bar{U}$ нет других нулей f, кроме z_0. Положим

$$\mu = \min_{z \in \partial U} |f(z)|$$

Из равномерной сходимости $\{f_n\}$ на ∂U следует, что найдется N такое, что для всех $n \geq N$

$$|f_n(z) - f(z)| < \mu \qquad \text{для всех } z \in \partial U$$

Тогда по теореме Руше функция

$$f_n(z) = f(z) + [f_n(z) - f(z)]$$

[2]В самом деле, $|f| > |g| \geq 0$, $|f+g| \geq |f| - |g| > 0$

имеет в U столько же нулей, сколько и f, т.е. по крайней мере один. ■

В качестве следствия из теоремы Гурвица докажем такое утверждение.

Следствие. *Пусть последовательность функций f_n, голоморфных и однолистных в области D, сходится равномерно на компактах в D к функции $f \neq \mathrm{const}$. Тогда f однолистна в D.*

Доказательство. Допустим, что f не однолистна, т.е. найдутся точки $z_1, z_2 \in \mathsf{D}$ такие, что

$$f(z_1) = f(z_2), \qquad \text{но } z_1 \neq z_2$$

Рассмотрим последовательность функций

$$g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2)$$

Она сходится равномерно на компактах к функции $g(z) := f(z) - f(z_2)$. Предельная функция не постоянна и имеет нуль в точке z_1. Пусть U – произвольный круг с центром в z_1, не содержащий z_2. Тогда по теореме Гурвица все функции g_n, начиная с некоторой, имеют нуль в U, что противоречит однолистности функций f_n.

16 Эллиптические функции

Периодические функции. Комплексное число Ω называется периодом функции f если $f(z+\Omega) = f(z)$. Функция, имеющая нетривиальные ($\neq 0$) периоды, называется периодической. Если $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ – периоды, то $m_1\Omega_1 + \ldots + m_n\Omega_n$ при всех целых $m_1, \ldots, m_n$ – тоже периоды.

Если функция отлична от постоянной, любой нетривиальный период удовлетворяет условию $|\Omega| \geq \mu > 0$. В самом деле, допустив существование сходящейся к 0 последовательности периодов Ω_n, будем иметь $f'(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(z+\Omega_n) - f(z)}{\Omega_n} = 0$, откуда $f = \mathrm{const}$. Отсюда следует, что в конечной части Ω-плоскости имеется лишь конечное число периодов; иначе они имели бы предельную точку и существовала бы последовательность периодов, имеющая конечный предел, а значит, f имела бы бесконечно малый период $\Omega_n - \Omega_m$ $(m, n \to \infty)$.

Пример функции с периодом Ω: $f(z) = e^{2\pi i z/\Omega}$.

Существуют ли функции с $n > 1$ примитивными периодами? При этом n периодов называются примитивными, если всякий период является их линейной комбинацией с целыми коэффициентами, и если не любой период может быть представлен как подобная комбинация меньшего числа периодов.

Теорема. *Не существует отличной от константы функции с $n \geq 3$ примитивными периодами. Отличная от константы функция с двумя примитивными периодами существует в том и только том случае, когда их отношение не вещественно.*

Доказательство. Возьмем какой-нибудь нетривиальный период Ω и рассмотрим периоды $m\Omega$, $m \in \mathbb{Z}$. Они лежат на некоторой прямой L (в Ω-плоскости). Возможны два случая: 1) все периоды функции f лежат на L, 2) не все периоды функции f лежат на L.

Разберем случай 1). Т.к. на отрезке прямой от 0 до Ω может лежать лишь конечное число периодов, найдется нетривиальный период с наименьшим модулем; пусть это будет как раз Ω. Поскольку все периоды лежат на L, всякий период представим в виде $t\Omega$, $t \in \mathbb{R}$, $|t| \geq 1$. Докажем, что t целое. Отсюда будет следовать, что f – однопериодическая функция с примитивным периодом Ω. Пусть $t = m + r$, $m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < 1$. Тогда периодом является и $r\Omega = t\Omega - m\Omega$, что невозможно, если $0 < r < 1$. Значит, $r = 0$, и $t \in \mathbb{Z}$.

В случае 2) обозначим один из не лежащих на L периодов через Ω' и рассмотрим треугольник с вершинами $0, \Omega, \Omega'$. Внутри его и на границе может лежать лишь конечное число периодов. Беря вместо одной из отличных от 0 вершин какой-нибудь период, лежащий внутри (или на стороне), получим аналогичный треугольник с меньшим числом периодов в нем. Продолжая этот процесс, придем к треугольнику, который вообще не содержит периодов (кроме вершин). Не нарушая общности, можно считать, что этим "пустым" треугольником и будет треугольник с вершинами $0, \Omega, \Omega'$. Достроим его до параллелограмма с вершинами $0, \Omega, \Omega', \Omega + \Omega'$. Мы утверждаем, что его вторая половина тоже является пустым треугольником. В самом деле, если бы во второй половине лежал бы период $\tilde{\Omega}$, в первой половине лежал бы период $\Omega + \Omega' - \tilde{\Omega}$, что невозможно, т.к. первая половина пуста. Итак, весь параллелограмм пуст. Всякий период представим в виде $t\Omega + t'\Omega'$, $t, t' \in \mathbb{R}$. Докажем, что t, t' – целые. Это будет означать, что число примитивных периодов равно двум, и их отношение не вещественно.

Пусть $t = m + r$, $t' = m' + r'$, где $m, m' \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < 1$, $0 \leq r' < 1$. Мы должны показать, что $r = r' = 0$. Т.к. $m\Omega$ и $m'\Omega'$ – периоды, периодом является также

$$t\Omega + t'\Omega' - m\Omega - m'\Omega' = r\Omega + r'\Omega'$$

Эта точка лежит в нашем параллелограмме и должна совпадать с одной из его вершин, т.к. параллелограмм пуст. Следовательно, $r = r' = 0$. ■

Общие свойства эллиптических функций. Мероморфные двоякопериодические функции называются *эллиптическими*. Множество периодов эллиптической функции есть решетка вида $L = \{n\Omega + m\Omega'\}$ $(n, m \in \mathbb{Z})$. Для определенности будем считать, что $\operatorname{Im} \Omega'/\Omega > 0$. Эллиптическую функцию достаточно изучать в ее параллелограмме периодов с вершинами $z_0, z_0 + \Omega, z_0 + \Omega', z_0 + \Omega + \Omega'$ (фундаментальном параллелограмме). Для простоты мы будем часто (но не всегда) считать, что $z_0 = 0$.

Теорема (Лиувилль). *Всякая эллиптическая функция, отличная от постоянной, имеет хотя бы один полюс (не существует целых эллиптических функций).*

Доказательство. Целая эллиптическая функция была бы ограничена в своем фундаментальном параллелограмме, а значит, и во всей плоскости $\mathbb{C}$. По теореме того же Лиувилля она должна быть константой. ■

Теорема. *Сумма вычетов эллиптической функции f по всем полюсам в фундаментальном параллелограмме Π равна 0.*

Доказательство. Выберем фундаментальный параллелограмм так, чтобы на границе не было полюсов. Функция f принимает одинаковые значения на его противоположных сторонах, поэтому

$$\oint_{\partial\Pi} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a\in\Pi} \mathrm{res}_a f = 0$$

(интегралы по противоположным сторонам сокращаются). ■

Отсюда следует, что непостоянная эллиптическая функция имеет в параллелограмме периодов не менее двух полюсов (с учетом кратности). Число полюсов (с учетом кратности) в фундаментальном параллелограмме эллиптической функции называется ее порядком.

Теорема. *Эллиптическая функция f принимает в фундаментальном параллелограмме Π каждое значение $a \in \overline{\mathbb{C}}$ одинаковое число раз, равное ее порядку.*

Доказательство. Снова можно считать, что на $\partial\Pi$ нет полюсов и a-точек функции f. По принципу аргумента имеем

$$N_a - P = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Pi} \frac{f'(z)}{f(z)-a}\, dz$$

Т.к. подынтегральная функция является эллиптической с теми же периодами, что и f, интеграл равен 0, и значит $N_a = P$. ■

В частности, число нулей эллиптической функции в фундаментальном параллелограмме равно числу полюсов.

Теорема. *Пусть эллиптическая функция f имеет в фундаментальном параллелограмме Π нули a_k порядков n_k и полюсы b_k порядков m_k. Тогда*

$$\sum_k n_k a_k - \sum_k m_k b_k = 0 \mod L$$

Доказательство. В силу теоремы Коши о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Pi} \frac{zf'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_k n_k a_k - \sum_k m_k b_k$$

С другой стороны, вычисляя контурный интеграл по сторонам параллелограмма, найдем:

$$\oint_{\partial\Pi} = \int_{z_0}^{z_0+\Omega} + \int_{z_0+\Omega}^{z_0+\Omega+\Omega'} + \int_{z_0+\Omega+\Omega'}^{z_0+\Omega'} + \int_{z_0+\Omega'}^{z_0} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$$

Делая в интеграле J_3 подстановку $z = \zeta + \Omega'$, получим

$$J_3 = \int_{z_0+\Omega}^{z_0} (\zeta+\Omega')\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta$$

и тогда

$$J_1 + J_3 = \Omega' \int_{z_0+\Omega}^{z_0} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \Omega'\Big(\log f(z_0) - \log f(z_0+\Omega)\Big)$$

Т.к. $f(z_0) = f(z_0+\Omega)$, $\log f(z_0)$ отличается от $\log f(z_0+\Omega)$ на целое кратное $2\pi i$, т.е. $J_1 + J_3 = 2\pi i n'\Omega'$, $n' \in \mathbb{Z}$. Аналогично можно показать, что $J_2 + J_4 = 2\pi i n\Omega$. ■

Тэта-функции. Тэта-функции – это целые функции комплексного аргумента, которые наиболее близки к двоякопериодическим. Из них как из строительных блоков можно строить эллиптические функции.

Фиксируем $\tau \in \mathbb{C}$ такое, что $\operatorname{Im} \tau > 0$ и рассмотрим ряд

$$\theta_3(z) = \theta_3(z|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau n^2 + 2\pi i n z}$$

Он абсолютно сходится для любого z. Легко получить следующие свойства квазипериодичности:

$$\theta_3(z+1) = \theta_3(z)$$

$$\theta_3(z+\tau) = e^{-\pi i(\tau+2z)}\theta_3(z)$$

Наряду с θ_3 введем еще три тэта-функции:

$$\theta_4(z) = \theta_3\Big(z + \tfrac{1}{2}\Big)$$

$$\theta_2(z) = e^{-\pi i(z-\frac{\tau}{4})}\theta_3\Big(z - \tfrac{\tau}{2}\Big)$$

$$\theta_1(z) = ie^{-\pi i(z-\frac{\tau}{4})}\theta_3\Big(z + \tfrac{1-\tau}{2}\Big)$$

Легко проверить, что θ_3, θ_4, θ_2 – четные, θ_1 – нечетная функции.

Докажем, что θ_3 имеет единственный ноль в параллелограмме (квази)периодов $1, \tau$. Для этого рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\Pi} g(z)\,dz, \quad g(z) = \frac{\theta_3'(z)}{\theta_3(z)} = \frac{d}{dz}\log\theta_3(z)$$

Свойства квазипериодичности функции g таковы: $g(z+1) = g(z)$, $g(z+\tau) = g(z) - 2\pi i$. Поэтому указанный интеграл легко вычисляется и оказывается равным 1, что по принципу аргумента и означает, что функция θ_3 имеет ровно один простой ноль в параллелограмме (квази)периодов. Из нечетности функции θ_1 (ноль которой находится в начале координат) следует, что ноль функции θ_3 находится в точке $z = \frac{1+\tau}{2}$.

Из тэта-функций можно строить эллиптические функции. Так, функция

$$F(z) = \frac{d^2}{dz^2}\log\theta_1(z)$$

будет эллиптической функцией порядка 2 с периодами $1, \tau$ и полюсом 2-го порядка в точке $z = 0$ (и, значит, во всех точках решетки $n + m\tau$). Вычет в этом полюсе равен 0. Функции

$$\varphi_1(z) = \frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}, \quad \varphi_2(z) = \frac{\theta_2(z)}{\theta_4(z)}, \quad \varphi_3(z) = \frac{\theta_3(z)}{\theta_4(z)}$$

будут эллиптическими порядка 2 с периодами $(2, \tau)$, $(2, 1+\tau)$ и $(1, 2\tau)$ соответственно. Каждая из них имеет по два простых полюса (с противоположными вычетами) в параллелограмме периодов.

$\wp$-функция Вейерштрасса. Для произвольной решетки $L = \{2\omega n_1 + 2\omega' n_2\}$, $n_{1,2} \in \mathbb{Z}$ построим эллиптическую функцию порядка 2, имеющую L своей решеткой периодов.

Лемма. *Ряд*

$$\sum_{n_1,n_2}{}' \frac{1}{|2\omega n_1 + 2\omega' n_2|^p}$$

где суммирование ведется по всем парам целых n_1, n_2 кроме пары $n_1 = n_2 = 0$, сходится при $p > 2$ и расходится при $p \le 2$.

<u>Доказательство</u>. Возьмем первое окаймление точки 0, т.е. систему 8 точек

$$\pm 2\omega, \quad \pm(2\omega + 2\omega'), \quad \pm 2\omega', \quad \pm(2\omega - 2\omega')$$

и обозначим сумму соответствующих им членов ряда через S_1. Пусть d – минимальное расстояние вершин этой системы точек от 0, а D – максимальное. Тогда

$$\frac{8}{D^p} \le S_1 \le \frac{8}{d^p}$$

Возьмем теперь 16 вершин, образующих второе окаймление точки 0, для них будет

$$\frac{16}{(2D)^p} \le S_2 \le \frac{16}{(2d)^p}$$

Аналогично, n-е окаймление будет состоять из $8n$ вершин, для него

$$\frac{8n}{(nD)^p} \le S_n \le \frac{8n}{(nd)^p}$$

Сходимость нашего ряда эквивалентна сходимости ряда $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots$, и утверждение леммы следует из полученных оценок

$$\frac{8}{D^p n^{p-1}} \le S_n \le \frac{8}{d^p n^{p-1}}$$

■

Из леммы вытекает, что ряд

$$\sum_{n_1,n_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - 2\omega n_1 - 2\omega' n_2)^3} = \sum_{\lambda \in L} \frac{1}{(z-\lambda)^3}$$

сходится абсолютно и равномерно в любом круге $|z| \le R$, если исключить из него конечное число членов, имеющих полюсы в этом круге. Действительно, рассматривая лишь члены, для которых $|\lambda| > 2R$, имеем $|z/\lambda| < \frac{1}{2}$ и

$$\left|\frac{1}{(z-\lambda)^3}\right| \le \frac{1}{\left(1 - \left|\frac{z}{\lambda}\right|\right)^3} \frac{1}{|\lambda|^3} < \frac{8}{|\lambda|^3}$$

Положим

$$Q(z) = -2 \sum_{\lambda \in L} \frac{1}{(z-\lambda)^3}$$

Это мероморфная функция. Легко видеть, что она периодическая с периодами 2ω, $2\omega'$ и нечетная. Введем функцию ($\wp$-функцию Вейерштрасса)

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \int_0^z \left(Q(\zeta) + \frac{2}{\zeta^3} \right) d\zeta$$

Таким образом, $\wp'(z) = Q(z)$, а с другой стороны почленное интегрирование дает

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in L}{}' \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

Т.к. $Q(z)$ – функция нечетная, $\wp(z)$ – функция четная. Ее единственные полюсы (порядка 2) расположены в точках решетки L.

Поскольку Q имеет период 2ω, $\wp'(z+2\omega) = \wp'(z)$, и, значит, $\wp(z+2\omega) = \wp(z) + c$. Подстановка $z = -\omega$ дает $c = 0$ в силу четности; аналогично для сдвига на $2\omega'$. Отсюда следует двоякопериодичность функции $\wp$.

В окрестности точки $z = 0$ функция $\wp$ имеет вид

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} \; + 3z^2 \sum_{\lambda \in L}{}' \frac{1}{\lambda^4} \; + 5z^4 \sum_{\lambda \in L}{}' \frac{1}{\lambda^6} \; + \ldots$$

Приняты обозначения $g_2 = 60 \sum_{\lambda \in L}{}' \frac{1}{\lambda^4}$, $\quad g_3 = 140 \sum_{\lambda \in L}{}' \frac{1}{\lambda^6}$. В этих обозначениях

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \ldots \;, \qquad \wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{g_2}{10} z + \frac{g_3}{7} z^3 + \ldots$$

Поэтому

$$[\wp(z)]^3 = \frac{1}{z^6} \left(1 + \frac{3g_2}{20} z^4 + \frac{3g_3}{28} z^6 + \ldots \right)$$

$$[\wp'(z)]^2 = \frac{4}{z^6} \left(1 - \frac{g_2}{10} z^4 - \frac{g_3}{7} z^6 + \ldots \right)$$

Из этих разложений получаем

$$[\wp'(z)]^2 - 4\,[\wp(z)]^3 + g_2 \wp(z) + g_3 = Az^2 + Bz^4 + \ldots$$

Левая часть есть эллиптическая функция с периодами $2\omega, 2\omega'$. Ее полюсами могут быть только точки решетки. А так как в точке 0 она регулярна и равна 0, она есть равная 0 константа. Итак, мы получили, что функция Вейерштрасса удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$[\wp'(z)]^2 = 4\,[\wp(z)]^3 - g_2 \wp(z) - g_3$$

Оно позволяет выразить все производные от $\wp(z)$ через $\wp(z)$ и $\wp'(z)$. Например: $\wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}\, g_2$, $\quad \wp''' = 12\wp\wp'$.

Обозначая $\wp(z) = w$, представим дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}}$$

откуда следует, что $\wp(z)$ является обращением интеграла

$$z - z_0 = \int_w^{w_0} \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}}, \qquad w_0 = \wp(z_0)$$

Устремляя $z_0 \to 0$, получаем эллиптический интеграл в форме Вейерштрасса

$$z = \int_w^{\infty} \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}}$$

Полагая $z = -\omega$ в равенстве $\wp'(z + 2\omega) = \wp'(z)$ (и аналогично для ω' и $\omega + \omega'$), найдем

$$\wp'(\omega) = \wp'(\omega') = \wp'(\omega + \omega') = 0$$

Мы видим, что все три полупериода являются нулями функции $\wp'$, и притом простыми нулями, т.к. это функция 3-го порядка. Положим

$$4w^3 - g_2 w - g_3 = 4(w - e_1)(w - e_2)(w - e_3)$$

Тогда из дифференциального уравнения для $\wp$ следует, что

$$e_1 = \wp(\omega), \quad e_2 = \wp(\omega + \omega'), \quad e_3 = \wp(\omega')$$

Поскольку $\wp'$ в этих точках равна 0, эти точки двукратные. Отметим еще, что три числа e_1, e_2, e_3 все различны. Действительно, если бы, например, имело место равенство $\wp(\omega) = \wp(\omega')$, то эллиптическая функция порядка 2 $\wp(z) - \wp(\omega)$ имела бы два нуля второго порядка.

Функции Вейерштрасса ζ и σ. Функция $\wp$ аналогична $1/\sin^2$. По аналогии с функцией ctg можно ввести функцию $\zeta(z)$ такую, что $\zeta'(z) = -\wp(z)$. Она определяется интегралом

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \int_0^z \left(\wp(u) - \frac{1}{u^2}\right) du$$

Почленное интегрирование дает

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\lambda \in L}{}' \left(\frac{1}{z - \lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{z}{\lambda^2}\right)$$

Единственными особенностями этой (нечетной) функции являются простые полюсы в точках решетки L. В силу $\zeta'(z) = -\wp(z)$ имеем:

$$\zeta(z + 2\omega) = \zeta(z) + 2\eta$$
$$\zeta(z + 2\omega') = \zeta(z) + 2\eta'$$

Полагая в этих равенствах $z = -\omega$, $z = -\omega'$, получим $\eta = \zeta(\omega)$, $\eta' = \zeta(\omega')$. Между η и η' имеется соотношение

$$2\eta\omega' - 2\eta'\omega = \pi i \quad (\text{при } \operatorname{Im} \omega'/\omega > 0)$$

которое доказывается интегрированием функции $\zeta(z)$ по контуру параллелограмма периодов.

Введем еще функцию $\sigma(z)$ такую, что $(\log\sigma)' = \zeta$. Она определяется интегралом

$$\log\sigma(z) = \log z + \int_0^z \left(\zeta(u) - \frac{1}{u}\right) du$$

Почленное интегрирование дает

$$\log\frac{\sigma(z)}{z} = \sum_{\lambda\in L}{}' \left\{\log\Bigl(1-\frac{z}{\lambda}\Bigr) + \frac{z}{\lambda} + \frac{z^2}{2\lambda^2}\right\}$$

Отсюда вытекает разложение σ-функции в бесконечное произведение

$$\sigma(z) = z\prod_{\lambda\in L}{}' \left(1-\frac{z}{\lambda}\right) e^{\frac{z}{\lambda}+\frac{z^2}{2\lambda^2}}$$

Из него следует, что $\sigma(z)$ – нечетная функция, имеющая простые нули в точках решетки периодов. Она аналогична функции sin.

Нетрудно получить следующие свойства квазипериодичности:

$$\begin{aligned}\sigma(z+2\omega) &= -e^{2\eta(z+\omega)}\sigma(z)\\ \sigma(z+2\omega') &= -e^{2\eta'(z+\omega')}\sigma(z)\end{aligned}$$

Функции Вейерштрасса связаны рядом нетривиальных тождеств. Вот два из них:

$$\zeta(z+w) = \zeta(z)+\zeta(w)+\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)}$$

$$\wp(z)-\wp(w) = -\frac{\sigma(z-w)\sigma(z+w)}{\sigma^2(z)\sigma^2(w)}$$

Наконец, приведем формулу, выражающую функцию σ через введенную ранее θ-функцию:

$$\sigma(z) = \frac{2\omega}{\theta_1'(0)} e^{\frac{\eta z^2}{2\omega}}\,\theta_1\Bigl(\frac{z}{2\omega}\Bigr)$$

а также формулы, выражающие эллиптические функции Якоби sn, cn и dn через θ-функции:

$$\mathrm{sn}(z) = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\,\frac{\theta_1\bigl(\frac{z}{2K}\bigr)}{\theta_4\bigl(\frac{z}{2K}\bigr)},\quad \mathrm{cn}(z) = \frac{\theta_4(0)}{\theta_2(0)}\,\frac{\theta_2\bigl(\frac{z}{2K}\bigr)}{\theta_4\bigl(\frac{z}{2K}\bigr)},\quad \mathrm{dn}(z) = \frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)}\,\frac{\theta_3\bigl(\frac{z}{2K}\bigr)}{\theta_4\bigl(\frac{z}{2K}\bigr)},$$

где $2K = \pi\theta_3^2(0)$.

Выражение произвольной эллиптической функции через функции Вейерштрасса. Пусть дана эллиптическая функция $f(z)$ с примитивными периодами $2\omega, 2\omega'$, и пусть она имеет полюсы $a_1,\ldots,a_n$ и нули $b_1,\ldots,b_n$ в параллелограмме периодов. Как мы знаем,

$$a_1+\ldots+a_n = b_1+\ldots+b_n \pmod{L}$$

Положим $b_1^* = b_1 + 2m\omega + 2m'\omega'$, где целые числа m, m' выбраны так, что $a_1 + \ldots + a_n = b_1^* + \ldots + b_n$. Тогда

$$f(z) = C\frac{\sigma(z - b_1^*)\sigma(z - b_2)\ldots\sigma(z - b_n)}{\sigma(z - a_1)\sigma(z - a_2)\ldots\sigma(z - a_n)}$$

Это представление аналогично представлению рациональной функции в виде отношения двух полиномов, разложенных в произведение линейных множителей.

Пусть известны полюсы $a_1, \ldots, a_n$ функции $f(z)$, лежащие в параллелограмме периодов, и соответствующие главные части

$$\frac{A_k}{z - a_k} + \sum_{r=2}^{m_k}(-1)^r(r-1)!\frac{A_k^{(r-1)}}{(z - a_k)^r}$$

где $\sum A_k = 0$ как сумма вычетов. Тогда эллиптическая функция с такими полюсами и главными частями имеет вид

$$f(z) = C + \sum_k A_k\zeta(z - a_k) + \sum_{k,r} A_k^{(r-1)}\wp^{(r-2)}(z - a_k)$$

(она действительно эллиптическая, т.к. $\sum A_k = 0$). Это аналог разложения на простые дроби для рациональных функций.

Отметим еще, что всякая эллиптическая функция может быть представлена в виде

$$f(z) = R_1(\wp(z)) + R_2(\wp(z))\wp'(z)$$

где $R_{1,2}$ – рациональные функции.

Реализация тора в виде кубической кривой в $\mathbb{C}^2$. Дифференциальное уравнение для функции Вейерштрасса показывает, что точки $(\wp(z), \wp'(z))$ лежат на кубической кривой $C \subset \mathbb{C}^2$, которая задается уравнением

$$C = \left\{(u, v) \in \mathbb{C}^2 : v^2 = 4u^3 - g_2u - g_3\right\}$$

где константы g_2, g_3 определяются по решетке L ($g_2 = 60G_4(L)$, $g_3 = 140G_6(L)$). С другой стороны, функции $\wp$, $\wp'$ определены на торе $T = \mathbb{C}/L$. Тем самым отображение, задаваемое функциями $\wp$, $\wp'$, связывает тор T с кубической кривой C.

Что такое комплексный тор? Каждой решетке L на плоскости $\mathbb{C}$ отвечает комплексный тор $T = T_L = \mathbb{C}/L$. Это одномерное комплексное многообразие. По определению тор T есть множество классов эквивалентности точек комплексной плоскости относительно отношения

$$z_1 \sim z_2 \;\Leftrightarrow\; z_1 - z_2 \in L$$

Локальная карта в малой окрестности произвольной точки $z \in T$ задается тождественным отображением этой окрестности на себя. Проекция $\pi : \mathbb{C} \to T$, сопоставляющая каждой точке плоскости класс эквивалентности в $T = \mathbb{C}/L$ есть неразветвленное голоморфное накрытие. Мероморфная функция $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ эллиптична с решеткой периодов L тогда и только тогда, когда существует голоморфное отображение $\Phi : T \to \overline{\mathbb{C}}$ такое, что $f = \Phi \circ \pi$. Тем самым тор T является естественной областью определения эллиптических функций с данной решеткой периодов L.

Чтобы задать структуру одномерного комплексного многообразия на C, рассмотрим функцию $v = \sqrt{P(u)}$ на $\mathbb{C} \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$, где $P(u) = 4u^3 - g_2u - g_3 = 4(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)$. В окрестности любой точки $u_0 \in \mathbb{C} \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ эта функция распадается на две голоморфные ветви. Поэтому в окрестности каждой из двух точек $(u_0, \pm v_0) \in C$, лежащих над точкой u_0, множество C однозначно проектируется на плоскость переменной u. Это и будет локальная карта в точках $(u_0, \pm v_0) \in C$.

Что происходит в окрестности точек e_j? Т.к. они все различны, $P'(e_j) \neq 0$, т.е. функция $P(u)$ обратима в окрестности точки e_j. Значит, окрестности каждой из оставшихся точек $(e_j, 0) \in C$ однозначно проектируются на плоскость переменной v. Эта проекция задает локальные карты (= локальные параметры) в этих точках.

Отображение $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$ задает на C глобальную параметризацию. Точнее, отображение $T \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^2$, задаваемое формулой $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$, является биголоморфизмом проколотого тора на кубическую кривую C. Оно может быть продолжено до отображения $T \to \bar{C}$ всего тора на кубическую кривую, пополненную одной точкой ∞.

17 Аналитическое продолжение

Под *аналитическим продолжением* функции f_0, заданной изначально на множестве $M \subset \mathbb{C}$, понимают доопределение ее до функции f, заданной в некоторой области $\mathsf{D} \supset M$, такое, что f голоморфна в D, и $f\Big|_M = f_0$.

Примеры:

- Функция $\dfrac{\sin z}{z} = 1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dots$ продолжается этим рядом до голоморфной функции на $\mathbb{C}$.
- Сумма ряда $f_0(z) = 1 + z + z^2 + \dots$ определена и голоморфна лишь в круге $|z| < 1$, но продолжается на $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ формулой $f(z) = (1-z)^{-1}$.
- Гамма-функция определена интегралом $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ при $\operatorname{Re} z > 0$; но продолжается на более широкую область с помощью функционального соотношения $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$.

Часто встречающимся частным случаем является аналитическое продолжение через границу. Пусть даны две односвязные области D_0 и D_1 без общих точек, такие, что их границы имеют общий кусок γ, и в этих областях заданы голоморфные функции f_0 и f_1. Если эти функции непрерывны в $\mathsf{D}_0 \cup \gamma$ и $\mathsf{D}_1 \cup \gamma$ и совпадают во всех точках кривой γ, то функция f_1 является аналитическим продолжением f_0 в область D_1, и функция

$$f(z) = \begin{cases} f_0(z) & \text{в} \quad \mathsf{D}_0 \\ f_0(z) = f_1(z) & \text{на} \quad \gamma \\ f_1(z) & \text{в} \quad \mathsf{D}_1 \end{cases}$$

голоморфна в $\mathsf{D} = \mathsf{D}_0 \cup \gamma \cup \mathsf{D}_1$.

Действительно, эта функция непрерывна в D. Покажем, что ее интеграл по любому замкнутому контуру C в D равен 0. Если C целиком лежит в D_0 или D_1, это прямо следует из теоремы Коши. Если C лежит частично в D_0, частично в D_1, обозначим эти части соответственно C_0, C_1, и c – часть границы γ, лежащей внутри C. По теореме Коши (в обобщенной форме) будем иметь

$$\oint_{C_0 \cup c} f(z)dz = 0, \quad \oint_{C_1 \cup c^-} f(z)dz = 0$$

Складывая эти равенства, получим $\oint_C f(z)dz = 0$, и по теореме Мореры f голоморфна в D.

Теория Вейерштрасса. Вообще говоря, аналитическое продолжение приводит к многозначным функциям. Для адекватного описания этой многозначности вводится новый объект – пара, состоящая из области и заданной в ней функции.

Элементом называется пара $\mathcal{F} = (\mathsf{D}, f)$, состоящая из области $\mathsf{D} \subset \overline{\mathbb{C}}$ и голоморфной в ней функции f.

Каноническим элементом с центром в точке a называется пара (U_a, f_a), где f_a – сумма сходящегося степенного ряда с центром в a, U_a – круг сходимости этого ряда. Два канонических элемента $\mathcal{F} = (U, f)$ и $\mathcal{G} = (V, g)$ равны, если $U = V$ и в этом круге $f = g$.

Говорят, что два элемента $\mathcal{F}_1 = (\mathsf{D}_1, f_1)$ и $\mathcal{F}_2 = (\mathsf{D}_2, f_2)$, области которых имеют непустое пересечение, являются *непосредственным аналитическим продолжением* (НАП) друг друга через область Δ – связную компоненту $\mathsf{D}_1 \cap \mathsf{D}_2$, – если всюду в Δ $f_1(z) = f_2(z)$ (при этом значения функции в остальных связных компонентах $\mathsf{D}_1 \cap \mathsf{D}_2$ не обязаны совпадать!).

Говорят, что элементы $\mathcal{F} = (\mathsf{D}, f)$ и $\mathcal{G} = (\mathsf{G}, g)$ являются аналитическим продолжением друг друга через цепочку областей Δ_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$, если существует такая цепочка элементов $\mathcal{F}_\nu = (\mathsf{D}_\nu, f_\nu)$, что 1) $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}$; 2) области D_ν и $\mathsf{D}_{\nu+1}$ имеют непустое пересечение и Δ_ν является одной из его связных компонент, при этом элемент $\mathcal{F}_{\nu+1}$ является НАП $\mathcal{F}_\nu$.

Если канонический элемент $\mathcal{F}_b = (U_b, f_b)$ является НАП элемента $\mathcal{F}_a = (U_a, f_a)$, и $b \in U_a$, то такое продолжение сводится к переразложению степенного ряда f_a в ряд по степеням $z - b$.

Вместо продолжения через цепочку областей часто удобнее рассматривать продолжение канонических элементов вдоль пути.

Канонический элемент $\mathcal{F}_0 = (U_0, f_0)$ называется продолжаемым вдоль пути $\gamma : I \to \mathbb{C}$ с началом в центре этого элемента, если существует семейство элементов

$$\mathcal{F}_t = (U_t, f_t), \quad t \in I = [0, 1],$$

с центрами $a_t = \gamma(t)$ и ненулевыми радиусами сходимости, удовлетворяющие следующему условию. Пусть u_{t_0} – такая связная окрестность точки $t_0 \in I$, что $\gamma(t) \in U_{t_0}$ для всех $t \in u_{t_0}$ (т.е. $\gamma(u_{t_0}) \subset U_{t_0}$), тогда для любого $t \in u_{t_0}$ элемент $\mathcal{F}_t$ является НАП $\mathcal{F}_{t_0}$. Элемент $\mathcal{F}_1$ называется аналитическим продолжением элемента $\mathcal{F}_0$ вдоль пути γ.

Лемма. *Если канонический элемент $\mathcal{F}_0$ продолжаем вдоль пути γ, то продолжение единственно, т.е. оно не зависит от выбора семейства, осуществляющего продолжение.*

Доказательство. Пусть элементы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{G}_1$ получаются продолжением $\mathcal{F}_0$ вдоль γ: первый при помощи семейства $\mathcal{F}_t$, а второй $\mathcal{G}_t$. Рассмотрим множество

$$E = \{t \in I : \mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t\}$$

Оно не пусто, ибо содержит точку $t = 0$.

Множество E открыто (в топологии I). В самом деле, пусть $t_0 \in E$, т.е. $\mathcal{F}_{t_0} = \mathcal{G}_{t_0}$. В силу непрерывности пути γ найдется окрестность $u_{t_0} \subset I$ такая, что дуга $\gamma(u_{t_0})$ принадлежит общему кругу сходимости элементов $\mathcal{F}_{t_0}$ и $\mathcal{G}_{t_0}$. Для всех точек этой дуги элементы $\mathcal{F}_t$ и $\mathcal{G}_t$ получаются НАП равных элементов $\mathcal{F}_{t_0} = \mathcal{G}_{t_0}$ и, следовательно, совпадают. Поэтому $u_{t_0} \subset E$.

Но E в то же время и замкнуто. Пусть t_0 – предельная точка E, и u_{t_0} – такая окрестность, что дуга $\gamma(u_{t_0})$ принадлежит меньшему из кругов сходимости элементов $\mathcal{F}_{t_0}$ и $\mathcal{G}_{t_0}$ (обозначим его W). В u_{t_0} найдется точка $t_1 \in E$, и в ней $\mathcal{F}_{t_1} = \mathcal{G}_{t_1}$. Так как $\gamma(t_1) \in W$, $\mathcal{F}_{t_0}$ и $\mathcal{G}_{t_0}$ являются НАП одинаковых элементов $\mathcal{F}_{t_1}$ и $\mathcal{G}_{t_1}$. Поэтому $f_{t_0} = g_{t_0}$ в пересечении W с общим кругом сходимости $\mathcal{F}_{t_1}$ и $\mathcal{G}_{t_1}$. Но тогда по теореме единственности $f_{t_0} = g_{t_0}$ всюду в W, и, следовательно, $\mathcal{F}_{t_0} = \mathcal{G}_{t_0}$, т.е. $t_0 \in E$.

Итак, непустое множество E одновременно открыто и замкнуто. Значит, $E = I$, и $\mathcal{F}_1 = \mathcal{G}_1$. ■

Лемма. *Если элемент $\mathcal{G}$ получается из $\mathcal{F}$ аналитическим продолжением вдоль пути γ, то $\mathcal{G}$ является продолжением $\mathcal{F}$ по цепочке областей.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}_t$ – семейство элементов, осуществляющих продолжение вдоль γ. Т.к. радиус элементов $R(t)$ является непрерывной функцией t (можно отдельно доказать), существует $\varepsilon > 0$ такое, что $R(t) \geq \varepsilon$ для всех $t \in I$. В силу равномерной непрерывности функции γ можно выбрать конечное число точек $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ так, чтобы $|\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})| < \varepsilon$. Отсюда следует, что элемент $\mathcal{F}_{t_\nu}$ является НАП элемента $\mathcal{F}_{t_{\nu-1}}$. Но $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, а $\mathcal{F}_1 = \mathcal{G}$. ■

Теорема. *Пусть пути γ_0 и γ_1 гомотопны в области* D*, имеют общие концы, и элемент $\mathcal{F}$ продолжаем вдоль любого пути γ_s ($s \in I$), осуществляющего гомотопию. Тогда результаты продолжения вдоль γ_0 и γ_1 совпадают.*

Доказательство. Пусть $\gamma : I \times I \to \mathbb{C}$ – функция, осуществляющая гомотопию $\gamma_0 \sim \gamma_1$, так что $\gamma_s(t) = \gamma(s,t)$. Обозначим $\mathcal{G}^s$ результат аналитического продожения исходного элемента $\mathcal{F}$ вдоль γ_s и рассмотрим множество

$$E = \{s \in I : \mathcal{G}^s = \mathcal{G}^0\}$$

Оно не пусто, ибо содержит точку $s = 0$. Пусть $s_0 \in E$. Найдется $\varepsilon > 0$ такое, что радиусы $R(t)$ элементов $\mathcal{G}_t^{s_0}$, осуществляющих продолжение вдоль γ_{s_0} не меньше ε для всех t. В силу равномерной непрерывности функции γ найдется окрестность $u_{s_0} \in I$ такая, что

$$|\gamma_s(t) - \gamma_{s_0}(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $s \in u_{s_0}$ и всех $t \in I$. Это означает, что пути γ_s и γ_{s_0} близки. Выберем последовательность t_ν ($\nu = 1, \dots, n$) так, чтобы точки $z_\nu^0 = \gamma_{s_0}(t_\nu)$ удовлетворяли неравенству

$$|z_\nu^0 - z_{\nu-1}^0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и элементы $\mathcal{G}_{t_{\nu-1}}^{s_0}$ и $\mathcal{G}_{t_\nu}^{s_0}$ являлись НАП друг друга. Обозначим еще $z_\nu = \gamma_s(t_\nu)$ и заметим, что при $s \in u_{s_0}$ и всех ν

$$|z_\nu - z_{\nu-1}^0| < \varepsilon$$

Элементы $\mathcal{G}_{t_1}^{s_0}$ и $\mathcal{G}_{t_1}^{s}$ являются НАП элемента $\mathcal{F}$ и, следовательно, друг друга. Точно так же заключаем, что $\mathcal{G}_{t_\nu}^{s_0}$ и $\mathcal{G}_{t_\nu}^{s}$ являются НАП друг друга. Но последние в этом ряду элементы имеют к тому же общий центр $z_n^0 = z_n = b$ и поэтому совпадают. Мы доказали, что $u_{s_0} \in E$ вместе с s_0, т.е. что E – открытое множество.

Но оно в то же время и замкнуто. В самом деле, пусть s_0 – предельная точка E. В окрестности u_{s_0} найдется точка $s \in E$, так что продолжение $\mathcal{F}$ вдоль γ_s приводит к элементу $\mathcal{G}^0$. Как и выше, продолжения по путям γ_s и γ_{s_0} приводит к равным элементам, т.е. $\mathcal{G}^{s_0} = \mathcal{G}^0$ и $s_0 \in E$.

Таким образом, $E = I$ и $\mathcal{G}^1 = \mathcal{G}^0$. ■

Если вдоль хотя бы одного из путей γ_s, осуществляющих гомотопию $\gamma_0 \sim \gamma_1$, продолжение невозможно, результаты продолжения могут оказаться различными. Пример: функция $\sqrt{z}$, γ_0, γ_1 – полуокружности в верхней и нижней полуплоскости. В данном случае продолжение невозможно вдоль отрезка вещественной оси, проходящего через 0.

Аналитические функции. *Аналитической функцией* называется совокупность канонических элементов, которые получаются из одного какого-то элемента $\mathcal{F} = (U, f)$ аналитическими продолжениями вдоль всех путей, начинающихся в центре элемента $\mathcal{F}$, вдоль которых такое продолжение возможно.

Это понятие не зависит от выбора начального элемента $\mathcal{F}$. В самом деле, пусть $\mathcal{G} = (V, g)$ – любой другой элемент той же аналитической функции; он получается из $\mathcal{F}$ продолжением вдоль некоторого пути γ. Но тогда и $\mathcal{F}$ получается из $\mathcal{G}$ продолжением вдоль пути γ^-, проходимом в обратном направлении. Любой другой элемент, который получается из $\mathcal{F}$ продолжением вдоль некоторого пути λ, можно получить и из $\mathcal{G}$ продолжением вдоль пути $\gamma^- \cup \lambda$.

Две аналитические функции считаются равными, если они имеют хотя бы один общий элемент.

Аналитическая функция может не быть функцией в обычном смысле. Пример: пусть $\mathcal{F} = (U, f)$, где $U = \{|z-1| < 1\}$,

$$f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \qquad z = re^{i\varphi}$$

Этот элемент можно продолжить в круг $V = \{|z+1| < 1\}$ двумя способами, которые приводят к различным функциям (отличающимся знаком). Эта двузначная аналитическая функция обозначается символом $\sqrt{z}$.

В некоторых случаях аналитические функции все-таки можно рассматривать как обычные.

Теорема (о монодромии). *Если некоторый элемент $\mathcal{F} = (U, f)$ аналитически продолжаем вдоль любого пути γ в односвязной области D, то определяемая этими продолжениями аналитическая функция однозначна в этой области.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ имеет центром точку a, и $z \in \mathsf{D}$ – произвольная точка. В силу односвязности любые два пути из a в z гомотопны. По условию $\mathcal{F} = (U, f)$ можно продолжить вдоль любого пути, осуществляющего гомотопию. Следовательно, по теореме об инвариантности аналитического продолжения для гомотопных путей все элементы с центром в точке z совпадают. Таким образом, аналитическая функция однозначна. ∎

Теорема. *Аналитическая функция может иметь не более чем счетное множество различных элементов с центром в фиксированной точке.*

Пример: корень. Аналитическая функция $\sqrt[n]{z}$ определяется следующим образом. В расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ с выброшенной отрицательной полуосью $\mathsf{D}_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}_-$ рассмотрим функцию

$$f_0(z) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\varphi/n}, \qquad -\pi < \varphi < \pi, \qquad z = re^{i\varphi}$$

Она взаимно однозначно отображает D_0 на сектор $\left\{-\frac{\pi}{n} < \psi < \frac{\pi}{n}\right\}$ в плоскости переменной $w = \rho e^{i\psi}$. Так как $w^n = z$, то по правилу дифференцирования обратной функции существует производная

$$f_0'(z) = \frac{1}{n(f_0(z))^{n-1}}$$

Поэтому пара $\mathcal{F}_0 = (\mathsf{D}_0, f_0)$ представляет собой аналитический элемент. Аналитическую функцию, которая получается при аналитических продолжениях этого элемента, называют $\sqrt[n]{z}$.

Такие продолжения можно описать, например, следующим образом. Рассмотрим область $\mathsf{D}_\alpha = \{-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha\}$ и в ней голоморфную функцию

$$f_\alpha(z) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\varphi/n}, \qquad -\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha$$

Очевидно, что элементы $\mathcal{F}_\alpha = (\mathsf{D}_\alpha, f_\alpha)$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$ будут представлять собой аналитическое продолжение элемента (D_0, f_0) (при $|\alpha| < \pi$ – непосредственное). Совокупность этих элементов и задает нашу функцию. Объединением областей этих элементов служит вся плоскость $\mathbb{C}$ с исключенными точками 0 и ∞.

Эту же функцию можно определить и с помощью канонических элементов. Примем за начальный элемент $\mathcal{G}_0$ с центром в точке $z = 1$, который состоит из круга $U = \{|z-1| < 1\}$ и голоморфной в нем функции

$$g_0(z) = (1 + (z-1))^{1/n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1\right) \ldots \left(\frac{1}{n} - k + 1\right) (z-1)^k$$

(мы воспользовались биномиальным разложением функции $\sqrt[n]{1+x}$ при $x > 0$ и продолжили разложение с интервала $(0, 2)$ в круг U). Элемент $\mathcal{G}_0$ эквивалентен $\mathcal{F}_0$, ибо при $z = x \in (0, 2)$ $f_0(x) = g_0(x) = \sqrt[n]{x}$, а так как обе функции голоморфны в U, то по теореме единственности $f_0(z) = g_0(z)$ при всех $z \in U$. Следовательно, аналитические функции, определяемые элементами $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{G}_0$, совпадают.

Каждой точке $z_0 \neq 0$ функция $\sqrt[n]{z}$ относит ровно n различных значений

$$w = \sqrt[n]{|z_0|}\, e^{i\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

где φ_0 – одно из возможных значений $\arg z_0$.

По теореме о монодромии однозначную ветвь аналитической функции $\sqrt[n]{z}$ (т.е. голоморфную функцию, принадлежащую какому-либо ее элементу) можно выделить в области, не содержащей точек 0 и ∞. Пример – плоскость с любым разрезом, соединяющим эти точки. Каждая из однозначных ветвей характеризуется указанием области, в которой она определена, и значением функции в одной из точек этой области.

Пример: логарифм. Логарифм $w = \log z$ можно определить аналитическим продолжением начального элемента, который состоит из области $\mathsf{D}_0 = \{-\pi < \varphi < \pi\}$ и заданной в ней функции

$$w = \log r + i\varphi, \qquad -\pi < \varphi < \pi, \qquad z = re^{i\varphi}$$

которая называется главной ветвью логарифма. Эта функция гомеоморфно отображает D_0 на полосу $\{-\pi < \operatorname{Im} w < \pi\}$. По правилу дифференцирования обратных функций в каждой точке из области D_0 существует производная

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$

Таким образом, наш элемент – аналитический.

Аналитическое продолжение, как и для корня, можно определить с помощью элементов, состоящих из области D_α и заданной в ней функции f_α, определенной в D_α той же формулой.

При определении с помощью канонических элементов в качестве начального элемента можно взять круг $U = \{|z - 1| < 1\}$ и голоморфную в нем функцию

$$\log z\,|_U = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\,(z-1)^k$$

(которая получается продолжением в круг соответствующей вещественной функции). Элементы $(\mathsf{D}_0, \log z)$ и $(U, \log z\,|_U)$ эквивалентны.

Каждой точке $z_0 \neq 0$ аналитическая функция $\log z$ относит счетное множество значений

$$w = \log|z_0| + i(\varphi_0 + 2k\pi)$$

где φ_0 – одно из возможных значений $\arg z_0$, и $k \in \mathbb{Z}$.

Особые точки аналитических функций. Точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *изолированной особой точкой* аналитической функции, если существует проколотая окрестность V' точки a такая, что некоторый элемент $\mathcal{F} = (U, f)$ этой функции продолжается аналитически вдоль любого пути $\gamma \subset V'$.

Пусть $\gamma_0 \subset V'$ – замкнутый путь, содержащий точку a внутри. Если обход γ_0 не меняет исходного элемента функции, a называется *особой точкой однозначного характера.* В этом случае продолжение исходного элемена вдоль любого пути $\gamma \subset V'$ приводит к одному и тому же элементу (но продолжение по путям, не принадлежащим V', может привести к другому элементу с тем же центром, так что рассматриваемая аналитическая функция может не быть однозначной). В зависимости от поведения f при приближении к a эта точка может быть устранимой, полюсом или существенной особенностью.

Если обход γ_0 приводит к элементу, отличному от исходного, то a называется *особой точкой многозначного характера* или *точкой ветвления.* В этом случае выделение в V' однозначной ветви невозможно.

Если существует целое число $n \geq 2$ такое, что n-кратный обход в одном направлении приводит к исходному элементу, точка a называется *точкой ветвления конечного порядка*, а наименьшее из чисел n с описанным свойством *порядком ветвления.* Если такого числа n не существует, обходы приводят к новым и новым элементам. В этом случае a называется точкой ветвления *бесконечного порядка* или *логарифмической точкой ветвления.*

Важное замечание. Пусть F – аналитическая функция в некоторой области, содержащей проколотую окрестность V' точки a. Тогда сужение $F\Big|_{V'}$ может состоять из *нескольких* аналитических функций на V', и каждая из них может иметь свою особенность в точке a.

Примеры: $\sqrt[n]{z}$, $\log z$, $\sqrt{1+\sqrt{z}}$.

Теорема. *В некоторой проколотой окрестности V' точки ветвления a порядка n аналитическую функцию (точнее, совокупность элементов этой функции, которые получаются из какого-либо одного продолжением вдоль всевозможных путей $\gamma \subset V'$) можно представить разложением вида*

$$w(z) = \sum_k c_k (z-a)^{k/n}$$

Доказательство. Положим $z - a = \zeta^n$. Когда точка ζ описывает в плоскости ζ достаточно малую окружность, соответствующая точка $z = a + \zeta^n$ описывает окружность n раз. Так как начальный элемент при таком обходе не меняется, соответствующий элемент функции w (как функции переменной ζ) не меняется при однократном обходе. Отсюда следует, что $\zeta = 0$ является особой точкой однозначного характера этой функции и, значит, представима рядом Лорана $w = \sum c_k \zeta^k$. Подставляя сюда $\zeta = (z-a)^{1/n}$, получаем наше разложение (ряд Пюизо). ∎

В качестве примера рассмотрим функцию $\sqrt{1+\sqrt{z}}$. В кольце $0 < |z| < 1$ имеем разложение

$$\sqrt{1+\sqrt{z}} = \pm\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{z} - \frac{1}{8}z + \dots\right)$$

В кольце $1 < |z| < \infty$

$$\sqrt{1+\sqrt{z}} = \sqrt[4]{z}\left(1+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)^{1/2} = \sqrt[4]{z}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{z}}-\frac{1}{8z}+\dots\right)$$

В кольце $0 < |z-1| < 1$

$$\sqrt{1+\sqrt{z}} = \sqrt{1\pm(1+(z-1))^{1/2}} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{z-1}}{i\sqrt{2}}\left(1+\dfrac{1}{8}(z-1)+\dots\right) \\ \pm\sqrt{2}\left(1+\dfrac{1}{8}(z-1)+\dots\right) \end{cases}$$

18 Римановы поверхности

Аналитическая функция может сопоставлять точкам комплексной плоскости несколько (даже счетное множество) значений. Поэтому она не является функцией в обычном смысле этого слова. Идея подхода Римана состоит в том, что для получения однозначной функции область определения надо заменить лежащей над комплексной плоскостью многолистной поверхностью, которая над каждой точкой основания имеет столько точек, сколько имеется различных элементов у продолженной функции. Тогда на этой "накрывающей поверхности" аналитическая функция станет однозначной. Абстрагируясь от того факта, что эта поверхность простирается над комплексной плоскостью, получаем общее понятие римановой поверхности как одномерного комплексного многообразия, служащего естественной областью определения аналитической функции.

Риманову поверхность аналитической функции лучше всего понимать как "график" аналитической функции f, т.е. множество точек $(z, w) \in \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ таких, что $w = f(z)$. Это двумерная поверхность, вложенная в $\mathbb{R}^4$ (своя для каждой функции f). Функция $f = w$ на ней, очевидно, становится однозначной. Многозначность f как функции переменной z означает просто, что на нашей поверхности есть различные точки с одной и той же координатой z, отличающиеся значением координаты w. Попытка спроектировать эту поверхность в $\mathbb{R}^3$, чтобы представить ее наглядно, приводит к самоперечечениям при склейке различных ее листов.

Элементарный подход. Рассмотрим в области $\mathsf{D} = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ две ветви f_1, f_2 аналитической функции $w = \sqrt{z}$. Они характеризуются условиями $f_1(1) = 1$, $f_2(1) = -1$. Имеем, очевидно, $f_1(z) = -f_2(z)$ для всех z. Эти ветви однолистно и конформно отображают D на соответственно левую и правую полуплоскости w.

Возьмем два экземпляра области D, расположим их друг над другом, и склеим верхний берег разреза на первом экземпляре с нижним берегом разреза на втором экземпляре, что на w-плоскости соответствует склейке левой и правой полуплоскостей вдоль верхней полуоси. Затем склеим оставшиеся свободными берега разрезов. (При второй склейке нельзя избежать самопересечений, но мы условимся понимать точки луча, по которому происходит самопересечение, как две разные точки.)

Полученная двулистная поверхность называется римановой поверхностью функции $\sqrt{z}$. Корень на ней можно рассматривать как однозначную функцию, ибо два значения корня $\sqrt{z_0}$ мы будем относить к двум различным точкам поверхности, лежащим над z_0. Точки $\mathbb{R}_-$ не составляют исключения, ибо над каждой из них тоже лежит по две точки (мы договорились их не отождествлять!). Лишь точкам $z = 0, \infty$ корень сопоставляет по одному значению, т.е. над этими точками лежит по одной точке римановой поверхности. В них листы соединяются между собой. Они называются точками ветвления.

Аналогично устроена риманова поверхность функции $\sqrt[n]{z}$. Она имеет n листов над каждой точкой, отличной от 0 и ∞. При обходе вокруг 0 мы последовательно переходим с листа на лист (при этом верхний берег разреза на i-м листе склеивается с нижним берегом на $(i+1)$-м листе). Верхний же берег на последнем, n-м листе подклеивается к нижнему берегу на первом листе, что опять-таки в $\mathbb{R}^3$ невозможно сделать без самопересечений.

Риманова поверхность функции $\log z$ бесконечнолистна. Верхний берег разреза на i-м листе склеивается с нижним берегом на $(i+1)$-м листе. Над окрестностью каждой точки $z \neq 0, \infty$ лежит часть поверхности, состоящая из счетного множества отдельных кругов. Каждому кругу мы отнесем ветвь логарифма, действующую в этой окрестности.

Абстрактные римановы поверхности. N-мерным многообразием называется хаусдорфово пространство, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной некоторому открытому множеству в $\mathbb{R}^N$. Двумерное многообразие называется поверхностью. Риманова поверхность – это поверхность с дополнительной структурой, наделяющей точки поверхности некоторыми свойствами комплексных чисел.

Пусть X – поверхность. *Локальная карта* (U, z) на X есть гомеоморфизм $z : U \to V$ некоторого открытого подмножества $U \subset X$ на открытое подмножество $V \subset \mathbb{C}$. Локальные карты называют также комплексными картами. Две локальные карты $z_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, $i = 1, 2$, называются *биголоморфно согласованными*, если отображение

$$z_2 \circ z_1^{-1} : z_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow z_2(U_1 \cap U_2)$$

(отображение переклейки) биголоморфно.

Комплексным атласом на X называется семейство $\{z_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{A}$ попарно биголоморфно согласованных карт, покрывающих X, т.е. $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = X$. Два комплексных атласа $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ и $\{(\tilde{U}_\beta, \tilde{z}_\beta)\}$ считаются эквивалентными, если отображение

$$\tilde{z}_\beta \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \cap \tilde{U}_\beta) \to \mathbb{C}$$

голоморфно для всех пар окрестностей $U_\alpha, \tilde{U}_\beta$ с непустым пересечением. Иными словами, два атласа эквивалентны, если их объединение – тоже атлас.

Комплексной структурой Σ на поверхности X называется класс эквивалентности биголоморфно согласованных атласов на X. *Римановой поверхностью* называется пара (X, Σ), состоящая из связного двумерного многообразия X и комплексной структуры на нем. Часто пишут просто X вместо (X, Σ), когда ясно, какая комплексная структура имеется в виду.

Локально риманова поверхность X есть не что иное, как открытое множество в $\mathbb{C}$. При помощи карты $z : U \to V \subset \mathbb{C}$ открытое множество $U \subset X$ биективно накрывает V. Однако заданная в X точка принадлежит многим картам, и ни одна из них не является предпочтительной. Поэтому из теории функций в $\mathbb{C}$ на римановы поверхности можно перенести только те понятия, которые инвариантны относительно биголоморфных отображений, т.е. для которых не надо указывать, какая специальная карта выбирается.

Примеры римановых поверхностей:

- **Комплексная плоскость** $\mathbb{C}$. Ее комплексная структура определяется атласом, единственной картой которого является тождественное отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

- **Область**. Пусть X – риманова поверхность и $Y \subset X$ – некоторая область (т.е. открытое связное подмножество). Тогда Y естественным образом тоже становится римановой поверхностью, если комплексную структуру определить при помощи атласа, состоящего из всех локальных карт $U \to V$, для которых $U \subset Y$.

- **Риманова сфера** $\mathbb{P}_1 = \mathbb{C} \cup \infty$. Имеем две локальные карты:

  $$U_0 = \{|z| < 2\}, \quad z_0(z) = z$$

  и

  $$U_1 = \{|z| > \frac{1}{2}\} \cup \infty, \quad z_1(z) = \frac{1}{z}, \;\; z_1(\infty) = 0$$

  Эти карты биголоморфно согласованы, поскольку в кольце $W = \{\frac{1}{2} < |z| < 2\}$ имеем

  $$z_1 \circ z_0^{-1} : W \to W, \quad z \mapsto \frac{1}{z}$$

- **Комплексный тор** $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Gamma$. Здесь Γ – группа параллельных переносов, порожденная сдвигами $z \mapsto z + 1$, $z \mapsto z + \tau$, $\operatorname{Im} \tau > 0$. Пусть $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ – каноническая проекция. Пусть $V \subset \mathbb{C}$ – открытое множество, не содержащее ни одной пары различных точек, эквивалентных $\operatorname{mod} \Gamma$. Тогда $U := \pi(V) \subset \mathbb{T}$ открыто, и $\pi : V \to U$ – гомеоморфизм. Обратное к нему отображение $z_U : U \to V$ задает локальную карту на $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Gamma$. Отображения переклейки – либо тождественные, либо параллельные переносы на векторы решетки.

Пусть X и Y – римановы поверхности. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется *голоморфным*, если для каждой пары карт $z_1 : U_1 \to V_1$ на X и $z_2 : U_2 \to V_2$ на Y, таких, что $f(U_1) \subset U_2$, отображение

$$z_2 \circ f \circ z_1^{-1} : \, V_1 \to V_2$$

голоморфно в обычном смысле. Отображение $f : X \to Y$ называют *биголоморфным*, когда оно биективно и как f, так и f^{-1} голоморфны.

Свойства голоморфного отображения $f : X \to Y$ в окрестности точки $x \in X$ описываются функцией $f_{12} = z_2 \circ f \circ z_1^{-1}$. Как и всякая голоморфная функция, она представляется в виде ряда $f_{12} = a_k z^k + \sum_{n>k} a_n z^n$, где $a_k \neq 0$. Число $k = \deg_x f$ называется *степенью ветвления* отображения f в точке x. Оно не зависит от выбора локальных карт.

Точка $x \in X$ называется критической точкой голоморфного отображения $f : X \to Y$ (или точкой ветвления), если $\deg_x f > 1$, т.е. $f'_{12}(x) = 0$. Точка $y \in Y$ называется критическим значением голоморфного отображения f, если прообраз $f^{-1}(y)$ содержит хотя бы одну критическую точку.

Формула Римана-Гурвица. Особый интерес представляют компактные римановы поверхности. Поскольку якобиан голоморфных отображений неотрицателен (равен $|f(z)|^2$), римановы поверхности ориентированы. Топологический тип связной ориентируемой поверхности полностью определяется ее родом g (числом ручек) или эйлеровой характеристикой $\chi = 2 - 2g$. Как известно,

$$\chi = V - E + F$$

для любой триангуляции поверхности с V вершинами, E ребрами и F гранями.

Рассмотрим голоморфное отображение компактных римановых поверхностей $f : P \to Q$. Тогда

$$n = \deg f = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \deg_p f$$

для любой точки $q \in Q$. Число n называется степенью отображения f.

Теорема (Формула Римана-Гурвица). *Пусть $f : P \to Q$ – голоморфное отображение римановой поверхности P рода g на риманову поверхность Q рода h, и n – степень отображения. Тогда*

$$\chi(P) = n\chi(Q) - \sum_{p \in P} (\deg_p f - 1)$$

или

$$g = n(h-1) + 1 + \frac{1}{2} \sum_{p \in P} (\deg_p f - 1)$$

Доказательство. Триангулируем поверхность Q так, чтобы вершины триангуляции включали все критические значения. Пусть у этой триангуляции будет V вершин, E ребер и F граней. Ее прообраз образует триангуляцию поверхности P. Она состоит из nF граней и nE ребер. Число вершин же равно $nV - \sum_{p \in P} (\deg_p f - 1)$, поскольку некоторые листы в этих точках склеиваются. Подсчет эйлеровых характеристик дает утверждение теоремы. ∎

Комплексные алгебраические кривые как римановы поверхности. Пусть $F(z, w) = \sum_{i=0}^{n} P_i(z) w^i$ – многочлен от переменных z, w. Он определяет n-значную алгебраическую функцию $w = w(z)$. Риманова поверхность X этой функции задается в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$F(z, w) = 0$$

Многозначная функция $w = w(z)$ превращается в однозначную функцию $w = w(P)$ от точки $P \in X$: если $P = (z, w) \in X$, то $w(P) = w$ (проекция графика на w-ось).

С комплексной точки зрения риманова поверхность есть алгебраическая кривая над $\mathbb{C}$. С вещественной точки зрения – это поверхность в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, заданная двумя уравнениями $\mathrm{Re}F = 0$, $\mathrm{Im}F = 0$.

Точка $P_0 = (z_0, w_0) \in X$ называется *неособой*, если в ней отличен от 0 комплексный вектор градиента

$$\left(\frac{\partial F(z_0, w_0)}{\partial z}, \frac{\partial F(z_0, w_0)}{\partial w}\right) \neq 0$$

Риманова поверхность неособая, если все ее точки неособые.

Лемма (о неявной функции). *Пусть точка $P_0 = (z_0, w_0)$ такова, что: 1) $F(z_0, w_0) = 0$, 2) $\dfrac{\partial F(z_0, w_0)}{\partial w} \neq 0$. Тогда существует единственная функция $w = w(z)$ такая, что $F(z, w(z)) = 0$ и $w(z_0) = w_0$. Эта функция будет аналитической функцией от z в некоторой окрестности точки z_0.*

Доказательство. Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$, $F = f + ig$. Уравнение $F(z, w) = 0$ запишется в виде системы

$$\begin{cases} f(x, y, u, v) = 0 \\ g\,(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

Для этой системы выполнены условия вещественной теоремы о неявной функции: матрица $\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}_{P_0}$ невырождена, поскольку

$$\det\begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} f_u & -g_u \\ g_u & f_u \end{pmatrix} = f_u^2 + g_u^2 = \left|\frac{\partial F}{\partial w}\right|^2$$

не равен 0 в точке P_0. Тем самым в некоторой окрестности точки z_0 существуют гладкие функции $u(z) = u(x, y)$, $\quad v(z) = v(x, y)$, $\quad w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ реализующие взаимно-однозначное отображение $(x, y) \to (u, v)$ и такие, что $F(z, w(x, y)) = 0$. Продифференцировав это уравнение по $\bar{z}$, получим

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}\frac{\partial F}{\partial \bar{w}} = 0$$

Первый и третий члены равны 0 в силу голоморфности F. Остается $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\frac{\partial F}{\partial w} = 0$, откуда заключаем, что $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$, так как $\frac{\partial F}{\partial w} \neq 0$. ∎

Пусть $P_0 = (z_0, w_0)$ – неособая точка поверхности X. Пусть, например, в этой точке $\partial F/\partial w \neq 0$. Тогда согласно лемме в окрестности точки P_0 поверхность допускает параметрическое представление вида $(z, w(z)) \in X$, $w(z_0) = w_0$, причем функция $w(z)$ голоморфна. Поэтому z является в этом случае комплексной локальной координатой или локальным параметром в окрестности точки P_0. Аналогично, если в точке P_0 отлична от нуля производная $\partial F/\partial z$, то в качестве локального параметра можно взять w. На пересечении областей первого и второго типов, т.е. в тех точках, где $\partial F/\partial w \neq 0$ и $\partial F/\partial z \neq 0$, можно пользоваться обоими локальными параметрами. Возникающие при этом функции переклейки $w(z)$ и $z(w)$ голоморфны.

Многообразие X, однако, не компактно. Ни к одной из его точек не сходится, например, последовательность (z_n, w_n), $F(z_n, w_n) = 0$, $z_n \to \infty$. Для того, чтобы компактифицировать X, рассмотрим множество $c_R = \{|z| > R\}$, причем R выберем большим модуля любого критического значения функции $h(z, w) = z$ на X. Множество $h^{-1}(c_R)$ без ветвлений накрывает цилиндр c_R. Продолжим это накрытие до отображения $h^{-1}(c_R) \cup E \to c_R \cup \infty$, добавив по точке к каждой компоненте связности прообраза $h^{-1}(c_R)$. Это продолжение вместе с отображением h порождает отображение $\tilde{h} : \bar{X} \to \overline{\mathbb{C}}$ поверхности $\bar{X} = X \cup E$ на сферу Римана.

Пример: гиперэллиптические римановы поверхности. Гиперэллиптические римановы поверхности имеют вид

$$w^2 = P_n(z)$$

где P_n – многочлен степени n. Эти поверхности двулистно расположены над z-плоскостью. Здесь $F(z, w) = w^2 - P_n(z)$. Вектор градиента: $\nabla F = (-P_n'(z), 2w)$. Точка (z_0, w_0) особая, если в ней $w_0 = 0$, $P_n'(z_0) = 0$ или

$$\begin{cases} P_n(z_0) = 0 \\ P_n'(z_0) = 0 \end{cases}$$

т.е. z_0 – кратный корень многочлена $P_n(z)$. Отсюда видно, что условие неособости – это условие отсутствия кратных корней у многочлена $P_n(z)$:

$$P_n(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i), \qquad z_i \neq z_j$$

Для определения точек ветвления имеем систему

$$\begin{cases} w^2 = P_n(z_0) \\ w = 0 \end{cases}$$

откуда видим, что точки ветвления суть $Q_i = (z_i, 0)$. В окрестности любой точки отличной от Q_i в качестве локального параметра естественно взять z. В окрестности точек ветвления в качестве локального параметра удобно взять w или $t = \sqrt{z - z_i}$. Тогда получим локальное параметрическое представление

$$z = z_i + t^2, \qquad w = t\sqrt{\prod_{j \neq i} (t^2 + z_i - z_j)}$$

При нечетном n гиперэллиптическая поверхность компактифицируется добавлением одной точки ∞ (которая будет точкой ветвления), при четном – двух. Род равен:

$$g = \frac{n-2}{2} \quad (n \text{ четное}) \qquad g = \frac{n-1}{2} \quad (n \text{ нечетное})$$

Теорема Кебе об униформизации: всякая односвязная риманова поверхность изоморфна $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ или $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Всякая риманова поверхность изоморфна $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, тору $\mathbb{C}/L$ (где L – дискретная решетка) или U/Γ, где $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(U)$ – дискретная группа, действующая без неподвижных точек.

19 Принцип сохранения области

Теорема. *Если f голоморфна в области D и не равна постоянной, то образ $\mathsf{D}^* = f(\mathsf{D})$ тоже является областью.*

Доказательство. Нужно доказать, что множество D^* связно и открыто.

Пусть w_1, w_2 – две произвольные точки в D^*; обозначим z_1 (z_2) один из прообразов w_1 (w_2) в D. Так как D линейно связно, то существует путь, связывающий z_1 и z_2. В силу непрерывности функции f его образ будет путем, связывающим w_1 и w_2 (он, очевидно, состоит из точек D^*). Таким образом, D^* связно, причем для этого достаточно только непрерывности функции f.

Доказательство открытости существенно использует теорему Руше, т.е. голоморфность. Пусть w_0 – произвольная точка в D^*, и z_0 – один из ее прообразов в D. Так как D открыто, существует круг $\{|z - z_0| < r\} \subset \mathsf{D}$. При достаточно малом r его замыкание не содержит других w_0-точек кроме z_0 (т.к. $f \neq \mathrm{const}$, они изолированы). Пусть γ – граница этого круга, и

$$\mu = \min_{z\in\gamma}|f(z) - w_0|$$

Очевидно, $\mu > 0$, иначе на γ лежала бы w_0-точка функции f. Теперь покажем, что $\{|w - w_0| < \mu\} \subset \mathsf{D}^*$. В самом деле, пусть w_1 – произвольная точка этого круга. Нам надо показать, что функция $f(z)$ внутри γ принимает значение w_1. Имеем

$$f(z) - w_1 = f(z) - w_0 + (w_0 - w_1)$$

причем на γ $|f(z) - w_0| \geq \mu$. Т.к. у нас $|w_0 - w_1| < \mu$, то по теореме Руше функция $f(z) - w_1$ имеет внутри γ столько же нулей, сколько их имеет $f(z) - w_0$, т.е. по крайней мере один. Итак, функция f внутри γ принимает значение w_1, т.е. $w_1 \in \mathsf{D}^*$. Т.к. это произвольная точка круга $\{|w - w_0| < \mu\}$, то и весь круг лежит в D^*. ∎

Рассмотрим задачу о локальном обращении голоморфных функций.

- Пусть функция $w = f(z)$ голоморфна в окрестности точки z_0. Требуется найти голоморфную в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ функцию $z = g(w)$ такую, что $g(w_0) = z_0$ и $f \circ g(w) = w$ в окрестности w_0.

I. Точка z_0 – не критическая, т.е. $f'(z_0) \neq 0$. Выберем круг $|z - z_0| < r$, не содержащий других w_0-точек кроме центра и как и раньше определим

$$\mu = \min_{z\in\gamma}|f(z) - w_0|$$

Пусть w_1 – любая точка круга $|w - w_0| < \mu$; то же рассуждение с применением теоремы Руше показывает, что f принимает значение w_1 столько же раз, сколько w_0, т.е. один раз. Таким образом, функция f принимает в круге $|z - z_0| < r$ любое значение из круга $|w - w_0| < \mu$ и притом один раз, т.е. функция f *локально однолистна* в точке z_0. В круге $|w - w_0| < \mu$ тем самым определена функция $z = g(w)$, для которой $g(w_0) = z_0$ и $f \circ g(w) = w$. Из однолистности f следует, что $\Delta w \neq 0$ при $\Delta z \neq 0$, откуда вытекает существование в любой точке круга производной $g'(w) = 1/f'(z)$, т.е. голоморфность g в этом круге.

II. Точка z_0 – критическая, т.е. $f'(z_0) = \ldots = f^{(p-1)}(z_0) = 0, f^{(p)}(z_0) \neq 0$. Повторим предыдущие рассуждения, выбрав теперь круг $|z - z_0| < r$ так, чтобы в нем кроме центра не было бы ни w_0-точек, ни нулей производной f'. Как и раньше, возьмем любую точку w_1 из круга $|w - w_0| < \mu$ и убедимся в том, что f принимает в круге $|z - z_0| < r$ значение w_1 столько же раз, сколько w_0. Из условия следует, что значение w_0 принимается p-кратно. Т.к. в нашем круге $f' \neq 0$, значение w_1 принимается в p различных точках, т.е. функция f локально p-листна.

В некоторой окрестности точки z_0 имеем

$$w = f(z) = w_0 + (z - z_0)^p \varphi(z)$$

где φ голоморфна и отлична от 0. Отсюда $\sqrt[p]{\varphi(z)}(z - z_0) = (w - w_0)^{1/p}$, где $\sqrt[p]{\varphi(z)}$ означает какую-либо ветвь корня. Эта ветвь разлагается в ряд Тейлора с центром в z_0 с не равным 0 свободным членом. Следовательно, для $\psi(z) = \sqrt[p]{\varphi(z)}(z - z_0)$ имеем $\psi'(z_0) \neq 0$. Положив $\omega = (w - w_0)^{1/p}$ и записав $\psi(z) = \omega$, найдем отсюда z как голоморфную функцию от ω: $z = \sum\limits_{n \geq 0} c_n \omega^n$, что эквивалентно разложению в обобщенный степенной ряд

$$z = g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - w_0)^{n/p}$$

Из проведенного анализа вытекает следующая теорема.

Теорема. *Условие $f'(z_0) \neq 0$ необходимо и достаточно для локальной однолистности голоморфной функции f в точке z_0.*

Достаточность следует также из общей теоремы вещественного анализа о неявных функциях (якобиан $|f'(z_0)|^2 \neq 0$). Но необходимость – чисто комплексный факт, не имеющий места в вещественном анализе (пример: $f = x^3 + iy$ – якобиан в 0 равен 0, но отображение однолистно).

20 Принцип соответствия границ

Пусть D и G – ограниченные односвязные области с простыми граничными кривыми Γ и $\tilde{\Gamma}$ соотвественно.

Теорема. *Пусть функция $w = f(z)$, голоморфная в области D и непрерывная вплоть до ее границы Γ, отображает взаимно однозначно кривую Γ на кривую $\tilde{\Gamma}$ с сохранением ориентации. Тогда эта функция однолистна в области D и конформно отображает область D на область G.*

Доказательство. Нужно доказать, что

а) для каждой точки $w_0 \in \mathsf{G}$ существует единственная точка $z_0 \in \mathsf{D}$ такая, что $f(z_0) = w_0$, т.е. функция $f(z) - w_0$ имеет ровно один нуль в D;

б) для каждой точки $w_1 \notin \mathsf{G}$ функция $f(z)$ не принимает значение w_1 при $z \in \mathsf{D}$.

По условию теоремы функция $f(z) - w_0$ не равна 0 на Γ, т.к. при $z \in \Gamma$ точка $w = f(z)$ принадлежит $\tilde{\Gamma}$, а $w_0 \in \mathsf{G}$. Значит, по принципу аргумента число нулей функции $f(z) - w_0$ в области D равно

$$N = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_\Gamma \arg\left(f(z) - w_0\right) = \frac{1}{2\pi}\,\Delta_{\tilde\Gamma} \arg\left(w - w_0\right)$$

Так как точка w_0 лежит во внутренности замкнутой кривой $\tilde\Gamma$, то $\Delta_{\tilde\Gamma} \arg(w - w_0) = 2\pi$ и $N = 1$. Аналогично, если точка w_1 лежит во внешности, то $\Delta_{\tilde\Gamma} \arg(w - w_1) = 0$ и уравнение $f(z) = w_1$ не имеет решений в D. ∎

Верна и обратная теорема (приводим ее без доказательства).

Теорема (Каратеодори). *Пусть функция $w = f(z)$ конформно отображает область D на область G. Тогда*

1) функцию $w = f(z)$ можно непрерывно продолжить на замыкание области D, т.е. можно доопределить ее на Γ так, что получится непрерывная в $\overline{\mathsf{D}}$ функция;

2) эта функция отображает взаимно однозначно кривую Γ на кривую $\tilde\Gamma$ с сохранением ориентации.

21 Принцип симметрии

Теорема. *Пусть граница области D_1 содержит дугу окружности γ и пусть функция $w = f_1(z)$ реализует конформное отображение этой области на область D_1^* такое, что дуга γ переходит в участок γ^* границы области D_1^*, также являющийся дугой окружности. В этих условиях функция f_1 допускает аналитическое продолжение f_2 через дугу γ в область D_2, симметричную с D_1 относительно γ, причем функция f_2 реализует конформное отображение области D_2 на область D_2^*, симметричную с D_2 относительно γ^*, а функция*

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{в } \mathsf{D}_1 \\ f_1(z) = f_2(z) & \text{на } \gamma \\ f_2(z) & \text{в } \mathsf{D}_2 \end{cases}$$

реализует конформное отображение области $\mathsf{D}_1 \cup \gamma \cup \mathsf{D}_2$ на $\mathsf{D}_1^* \cup \gamma^* \cup \mathsf{D}_2^*$.

Доказательство. Совершив дробно-линейные преобразования, переводящие γ и γ^* в отрезки вещественной оси, можно свести все к случаю, когда D_1 и D_2 (а также D_1^* и D_2^*) – области, симметричные относительно вещественной оси. Рассмотрим в D_2 функцию

$$f_2(z) = \overline{f_1(\bar z)}$$

и покажем, что она является аналитическим продолжением функции f_1. Прежде всего, f_2 аналитична в D_2. В самом деле,

$$\frac{f_2(z + \Delta z) - f_2(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{f_1(\bar z + \overline{\Delta z})} - \overline{f_1(\bar z)}}{\Delta z} = \frac{\overline{f_1(\bar z + \overline{\Delta z}) - f_1(\bar z)}}{\overline{\Delta z}}$$

где $\bar z$ и $\bar z + \overline{\Delta z}$ – точки из D_1. В силу голоморфности f_1 в D_1 правая часть имеет предел при $\overline{\Delta z} \to 0$, и тогда

$$f_2'(z) = \overline{f_1'(\bar z)}$$

в любой точке D_2, т.е. f_2 голоморфна там. На вещественной оси $f_2(x) = \overline{f_1(x)}$, но т.к. значения f_1 вещественны (γ^* по условию – отрезок вещественной оси), то на отрезке γ имеем $f_2(x) = f_1(x)$. По принципу непрерывного аналитического продолжения можно утверждать, что f_2 является аналитическим продолжением f_1 через γ. ■

Теорема. *Если граница области* D *содержит аналитическую дугу* γ*, то конформное отображение этой области на единичный круг можно аналитически продолжить через* γ*.*

Доказательство. Для любого $t_0 \in [\alpha, \beta]$ найдется окрестность $u = \{t \in \mathbb{C} : |t - t_0| < r\}$, в которую $\gamma(t)$ продолжается как голоморфная функция комплексной переменной. В силу условия $\gamma'(t_0) \neq 0$ можно считать, что она однолистна в u. Функция γ отображает диаметр $d \subset u$ (состоящий из точек вещественной оси) на дугу $\gamma_0 \subset \gamma$. Обозначим через u^+ тот из полукругов $u \setminus d$, который γ отображает в D. Функция $g = f \circ \gamma$ в u^+ удовлетворяет условиям принципа симметрии (она переводит d в дугу единичной окружности) и, следовательно, аналитически продолжается в u. Отсюда вытекает, что f аналитически продолжается через дугу γ_0.

22 Принцип компактности

Семейство функций $\mathcal{F} = \{f\}$ называется *равномерно ограниченным*, если для любого компакта $K \subset \mathsf{D}$ найдется константа $M = M(K)$ такая, что

$$|f(z)| \leq M \qquad \text{для всех } z \in K \text{ и всех } f \in \mathcal{F}$$

Семейство функций $\mathcal{F} = \{f\}$ называется *равностепенно непрерывным*, если для любого компакта $K \subset \mathsf{D}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(K, \varepsilon)$ такое, что

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon \qquad \text{для всех } z, z' \in K \text{ с } |z - z'| < \delta \text{ и всех } f \in \mathcal{F}$$

Теорема. *Если семейство функций* $\mathcal{F} = \{f\}$*, голоморфных в области* D*, равномерно ограничено, то оно равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Пусть $K \subset \mathsf{D}$ – компакт; обозначим через 2ρ расстояние между K и $\partial\mathsf{D}$, и через

$$K_\rho = \bigcup_{z_0 \in K} \{z : |z - z_0| \leq \rho\}$$

ρ-раздутие компакта K. По условию найдется константа A такая, что

$$|f(z)| \leq A \quad \text{для всех } z \in K_\rho \text{ и всех } f \in \mathcal{F}$$

Пусть z_0 – произвольная точка из K. Круг $U_\rho = \{|z - z_0| < \rho\}$ компактно содержится в K_ρ, и для всех $z \in U_\rho$ и всех $f \in \mathcal{F}$

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z)| + |f(z_0)| \leq 2A$$

Отображение $\zeta = (z - z_0)/\rho$ преобразует круг U_ρ в единичный круг $|\zeta| < 1$, а функция

$$g(\zeta) := \frac{f(z_0 + \rho\zeta) - f(z_0)}{2A}$$

удовлетворяет условиям леммы Шварца ($g(0) = 0$, $|g(\zeta)| \le 1$). По лемме Шварца $|g(\zeta)| \le |\zeta|$, откуда

$$|f(z) - f(z_0)| \le \frac{2A}{\rho}\,|z - z_0| \quad \text{для всех } z \in U_\rho$$

Для любого $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \delta(\varepsilon, K) = \min\left\{\frac{\varepsilon\rho}{2A},\, \rho\right\}$. Тогда ввиду произвольности $z_0 \in K$ имеем

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon \quad \text{для всех } f \in \mathcal{F} \text{ и всех } z', z'' \in K \text{ с } |z' - z''| < \delta$$

■

Семейство функций $\mathcal{F} = \{f\}$, голоморфных в области D, называется *компактным в* D, если из любой последовательности $\{f_n\}$ функций этого семейства можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся равномерно на компактах в D. Семейство $\mathcal{F}$ называется *компактным в себе*, если предел любой такой последовательности снова принадлежит $\mathcal{F}$.

Теорема (Монтель). *Если семейство функций $\mathcal{F} = \{f\}$, голоморфных в области D, равномерно ограничено внутри D, то оно компактно в D.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{Q} = \{\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots\} \subset \mathsf{D}$ – подмножество всех точек из D с рациональными координатами. Оно всюду плотно в D. Возьмем произвольную последовательность $\{f_n\}$ функций из $\mathcal{F}$ и выберем из нее такую подпоследовательность f_n^1, что ряд $f_n^1(\tilde{z}_1)$ сходится (это возможно в силу ограниченности). Из последовательности f_n^1 выберем такую подпоследовательность f_n^2, что ряд $f_n^2(\tilde{z}_2)$ сходится и т.д. Положим $h_n = f_n^n$. Тогда последовательность $h_n(\tilde{z}_j)$ сходится при любом j, ибо по построению все ее члены, начиная с j-го, выбраны из последовательности f_n^j, сходящейся в точке $\tilde{z}_j$.

Докажем, что последовательность h_n сходится равномерно на любом компакте $K \subset \mathsf{D}$. Поскольку семейство $\mathcal{F}$ равномерно ограничено, по предыдущей теореме оно равностепенно непрерывно. Это означает, что существует такое покрытие компакта K конечным числом M квадратиков, что если z' и z'' принадлежат одному квадратику, то $|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $f \in \mathcal{F}$. Выберем в каждом квадратике по одной точке из множества $\mathcal{Q}$, пусть это будут точки $z_1, \ldots, z_M$. Ввиду сходимости последовательностей $h_n(z_i)$ для всех i и согласно критерию Коши существует такое N, что $|h_m(z_i) - h_n(z_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $m, n > N$ для всех i. Таким образом, если z лежит в том же квадратике, что и z_i, имеем оценку

$$|h_m(z) - h_n(z)| \le |h_m(z) - h_m(z_i)| + |h_m(z_i) - h_n(z_i)| + |h_n(z_i) - h_n(z)| < \varepsilon$$

Следовательно, согласно критерию Коши последовательность h_n равномерно сходится на K. ■

Отображение $J : \mathcal{F} \to \mathbb{C}$, определенное на семействе функций $\mathcal{F}$, называется *функционалом*. Функционал называется *непрерывным*, если для любой последовательности $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, сходящейся равномерно на компактах к функции $f \in \mathcal{F}$, имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} J(f_n) = J(f)$.

Пример: функционал $J(f) = f^{(p)}(a)$ непрерывен на множестве голоморфных функций в области D, т.к. для всякой последовательности f_n, сходящейся на компактах, $f_n^{(p)}(a) \to f^{(p)}(a)$ по теореме Вейерштрасса.

Лемма. *Если функционал J непрерывен на компактном в себе семействе функций $\mathcal{F}$, голоморфных в области D, то $|J|$ ограничен на $\mathcal{F}$ и достигает своей верхней грани, т.е. найдется функция $f_0 \in \mathcal{F}$ такая, что $|J(f)| \leq |J(f_0)|$ для всех $f \in \mathcal{F}$.*

Доказательство. Положим $A := \sup_{f\in\mathcal{F}}|J(f)|$. По определению верхней грани найдется последовательность $f_n \in \mathcal{F}$ такая, что $|J(f_n)| \to A$ при $n \to \infty$. Так как $\mathcal{F}$ компактно в себе, найдется подпоследовательность f_{n_k}, сходящаяся равномерно на компактах к некоторой функции $f_0 \in \mathcal{F}$. Тогда в силу непрерывности функционала имеем

$$|J(f_0)| = \lim_{n\to\infty} |J(f_n)| = A$$

Отсюда заключаем, что $A < \infty$ и $|J(f)| \leq |J(f_0)|$ для всех $f \in \mathcal{F}$. ∎

23 Теорема Римана

Теорема. *Любая односвязная область D, граница которой содержит более одной точки, конформно эквивалентна единичному кругу.*

Идея доказательства такова. Рассмотрим семейство S голоморфных и однолистных в D функций f, таких, что $|f(z)| \leq 1$ (т.е. отображающих D в единичный круг U). Фиксируем точку $a \in \mathsf{D}$ и будем искать в семействе функцию, для которой растяжение $|f'(a)|$ в точке a максимально. Выделив компактную в себе часть S_1 семейства S и пользуясь непрерывностью функционала $J(f) = |f'(a)|$, мы можем утверждать, что функция f_0 с максимальным растяжением в точке a существует. После этого надо убедиться в том, что f_0 отображает D *на весь круг* U.

Доказательство. А). Докажем, что в D существует хотя бы одна голоморфная и однолистная функция, ограниченная 1 по модулю. По условию $\partial\mathsf{D}$ содержит две различные точки α и β. Рассмотрим функцию $\sqrt{\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}}$. Так как область D односвязна, то по теореме о монодромии в ней можно выделить две голоморфные однозначные ветви этой функции (они отличаются знаком). Обозначим их φ_1 и φ_2.

Функции φ_1, φ_2 однолистны в D. Действительно, из равенства $\varphi_j(z_1) = \varphi_j(z_2)$ $(j = 1, 2)$ следует равенство

$$\frac{z_1-\alpha}{z_1-\beta} = \frac{z_2-\alpha}{z_2-\beta}$$

откуда $z_1 = z_2$. Эти ветви отображают D на области $\Delta_1 = \varphi_1(\mathsf{D})$, $\Delta_2 = \varphi_2(\mathsf{D})$, которые не имеют общих точек. Действительно, если бы нашлись точки z_1, z_2 такие, что $\varphi_1(z_1) = \varphi_2(z_2)$, возведение в квадрат дало бы как и выше $z_1 = z_2 := z \in \mathsf{D}$. Поскольку $\varphi_2(z) = -\varphi_1(z)$ по построению (и одновременно $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$), отсюда следовало бы, что $\varphi_1(z) = \varphi_2(z) = 0$. Но это невозможно, ибо обе функции не имеют нулей в D.

Область Δ_2 содержит некоторый круг $|w - w_0| < \rho$, и, значит, φ_1 не принимает значений из этого круга. Поэтому функция

$$\phi(z) = \frac{\rho}{\varphi_1(z) - w_0}$$

очевидно, голоморфная и однолистная, ограничена: $|\phi(z)| \le 1$ для всех $z \in \mathsf{D}$.

Б). Обозначим через S семейство всех голоморфных однолистных в D функций, ограниченных по модулю 1. Оно не пусто, ибо содержит функцию ϕ и по теореме Монтеля компактно. Пусть S_1 – часть семейства S, состоящая из всех функций, для которых $|f'(a)| \ge |\phi'(a)| > 0$ в некоторой точке $a \in \mathsf{D}$. По следствию из теоремы Гурвица предел последовательности функций $f_n \in S_1$, сходящейся на любом $K \subset \mathsf{D}$, может быть лишь однолистной функцией (и тогда она принадлежит S_1) либо постоянной. Второй случай исключен неравенством $|f_n'(a)| \ge |\phi'(a)| > 0$. Поэтому семейство S_1 компактно в себе.

Рассмотрим на S_1 функционал $J(f) = |f'(a)|$. Он непрерывен на компактном в себе семействе, и, значит, существует функция f_0, реализующая его максимум, т.е. такая, что

$$|f'(a)| \le |f_0'(a)| \quad \text{для всех } f \in S_1$$

В). Покажем, что $f_0(a) = 0$. В противном случае в S_1 нашлась бы функция

$$g(z) = \frac{f_0(z) - f_0(a)}{1 - \overline{f_0(a)} f_0(z)}$$

для которой $|g'(a)| = \dfrac{|f_0'(a)|}{1 - |f_0(a)|^2} > |f_0'(a)|$ вопреки экстремальному свойству функции f_0.

Покажем, наконец, что f_0 отображает D *на весь* единичный круг U. Предположим, что f_0 не принимает в D некоторого значения $b \in U$. Так как $f_0(a) = 0$, то $b \ne 0$. Но и значение $b^* = 1/\bar{b}$ не принимается этой функцией в D (ибо $|b^*| > 1$). Следовательно, по теореме о монодромии в D можно выделить однозначную ветвь функции

$$\psi(z) = \sqrt{\frac{f_0(z) - b}{1 - \bar{b} f_0(z)}}$$

Эта функция однолистна (проверяется так же, как в пункте А)) и ограничена по модулю 1, т.е. $\psi \in S$. Но тогда S принадлежит и функция

$$h(z) = \frac{\psi(z) - \psi(a)}{1 - \overline{\psi(a)} \psi(z)}$$

для которой

$$|h'(a)| = \frac{1 + |b|}{2\sqrt{|b|}} \, |f_0'(a)| > |f_0'(a)|$$

что противоречит экстремальности функции f_0. ■

Из теоремы Римана следует, что любые две односвязные области, границы которых содержат более одной точки, биголоморфны друг другу.

Выделим три канонические односвязные области: замкнутая плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ (граница – пустое множество), открытая плоскость $\mathbb{C}$ (граница – одна точка) и единичный круг U. Различные канонические области не изоморфны друг другу. В самом деле, $\overline{\mathbb{C}}$ даже не гомеоморфна $\mathbb{C}$ и U. Области $\mathbb{C}$ и U гомеоморфны, но конформного отображения $\mathbb{C}$ на U не существует, ибо такое отображение было бы целой функцией, ограниченной по модулю 1, т.е. константой по теореме Лиувилля.

Вопрос о единственности конформного отображения на каноническую область связан с богатством ее группы конформных автоморфизмов. Всякий конформный автоморфизм канинической области является дробно-линейным. Для U это следует из леммы Шварца (см. выше). Для $\overline{\mathbb{C}}$ имеется следующее рассуждение. Пусть φ – произвольный автоморфизм $\overline{\mathbb{C}}$; существует единственная точка z_0 такая, что $\varphi(z_0) = \infty$. Функция φ голоморфна всюду в $\overline{\mathbb{C}}$ кроме точки z_0, где она имеет полюс, причем первого порядка, иначе функция неоднолистна. Поэтому $\varphi(z) = \dfrac{A}{z - z_0} + B$ если $z_0 \neq \infty$ и $\varphi(z) = Az + B$ если $z_0 = \infty$, и, таким образом, является дробно-линейной функцией.

Если область D изоморфна U, то совокупность всех конформных отображений D на U зависит от 3 вещественных параметров. В частности, существует единственное конформное отображение f области D на U, нормированное условиями

$$f(z_0) = 0, \qquad \arg f'(z_0) = \theta$$

где z_0 – произвольная точка D, а θ – вещественное число, $0 \leq \theta < 2\pi$. Действительно, пусть есть два нормированных отображения f_1 и f_2 области D на U. Тогда $\varphi = f_1 \circ f_2^{-1}$ будет автоморфизмом U, причем $\varphi(0) = 0$ и $\arg \varphi'(0) = 0$. Из явной формулы для автоморфизмов круга заключаем, что $\varphi(z) = z$, т.е. $f_1 = f_2$.

24 Интеграл Кристоффеля-Шварца

Рассмотрим конформное отображение $z = f(w)$ верхней полуплоскости $\operatorname{Im} w > 0$ на многоугольник M, заданный в плоскости z. Используются следующие обозначения: A_k – последовательные вершины многоугольника M $(k = 1, \ldots, n)$, $\pi\alpha_k$ – внутренний угол в вершине A_k $(0 < \alpha_k \leq 2, \ \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = n - 2)$, a_k – прообраз вершины A_k при отображении f, т.е. $f(a_k) = A_k$. Предположим для простоты, что все вершины находятся в конечных точках.

Мы докажем, что отображение f дается формулой Кристоффеля-Шварца

$$f(w) = C \int_{w_0}^{w} (u - a_1)^{\alpha_1 - 1} (u - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (u - a_n)^{\alpha_n - 1} du + C_1$$

где C, C_1 – некоторые постоянные.

Существование такой функции f следует из теоремы Римана. Изучим свойства этой функции. Покажем, что функция f является аналитической во всей расширенной комплексной плоскости с выколотыми точками a_k (предполагаем, что $a_k \neq \infty$).

Так как на любом участке (a_k, a_{k+1}) вещественной оси функция f принимает значения, лежащие на прямолинейном отрезке (A_k, A_{k+1}), то по принципу симметрии она аналитически продолжаема через этот отрезок в нижнюю полуплоскость. Это аналитическое продолжение реализует конформное отображение нижней полуплоскости на многоугольник M'_k, симметричный с M относительно стороны (A_k, A_{k+1}). Эту функцию можно снова продолжить через любой отрезок (a_l, a_{l+1}) в верхнюю полуплоскость, причем новое аналитическое продолжение будет реализовывать конформное отображение верхней полуплоскости w на многоугольник M''_{kl}, полученный из M'_k отражением относительно стороны (A'_l, A'_{l+1}). Если выполнить все аналитические продолжения такого рода, получится бесконечнозначная аналитическая функция, для которой исходная функция f является одной из однозначных ветвей в верхней полуплоскости.

Пусть f_1, f_2 – две произвольные ветви функции f в верхней полуплоскости. Согласно нашему построению, эти ветви осуществляют конформное отображение верхней полуплоскости на два многоугольника M_1, M_2, отличающихся друг от друга четным числом отражений относительно сторон. Но всякая пара отражений относительно произвольных прямых сводится к сдвигу и повороту, т.е. всюду в верхней полуплоскости мы имеем

$$f_2(w) = e^{i\alpha} f_1(w) + a$$

То же самое справедливо для ветвей функции f в нижней полуплоскости. Далее, функция $g(w) = f''(w)/f'(w)$ аналитична в верхней полуплоскости, ибо $f'(w) \neq 0$ как производная функции, осуществляющей конформное отображение. Функция g остается однозначной при всевозможных аналитических продолжениях f, т.к. $f''_1(w)/f'_1(w) = f''_2(w)/f'_2(w)$. Таким образом, g – однозначная голоморфная функция во всей плоскости кроме точек a_k, где она имеет изолированные особенности.

Чтобы определить характер особенностей, рассмотрим конформное отображение вблизи точки a_k и покажем (см. ниже), что оно имеет вид

$$f(w) = A_k + (w - a_k)^{\alpha_k} h_k(w)$$

где h_k – голоморфная функция в малой окрестности точки a_k такая, что $h_k(a_k) \neq 0$. Тогда для g в проколотой окрестности точки a_k сразу получаем

$$g(w) = \frac{\alpha_k - 1}{w - a_k} + \gamma(w)$$

где $\gamma(w)$ – голоморфная функция в этой окрестности.

После этого рассмотрим функцию $F(w) = g(w) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{w - a_k}$. Она голоморфна всюду в комплексной плоскости и, значит, равна константе. Для нахождения константы рассмотрим поведение функции g на ∞. Поскольку образ отображения f состоит из конечных точек, разложение в окрестности ∞ имеет вид

$$f(w) = c_0 + \frac{c_1}{w} + O(w^{-2})$$

Для g отсюда следует, что $g(w) = -\frac{2}{w} + O(w^{-2})$, так что константа равна 0, и мы находим

$$g(w) = \frac{d}{dw} \log f'(w) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k - 1}{w - a_k}$$

Интегрируя, получаем формулу Кристоффеля-Шварца.

Осталось показать, что $f(w) = A_k + (w - a_k)^{\alpha_k} h_k(w)$ вблизи a_k. В окрестности точки a_k рассмотрим вспомогательную функцию $\zeta = (f(w) - A_k)^{1/\alpha_k}$ (напомним, что $f(a_k) = A_k$). Она реализует конформное отображение части окрестности точки a_k, принадлежащей верхней полуплоскости, на часть окрестности точки $\zeta = 0$, причем отрезку вещественной оси плоскости w соответствует отрезок прямой на плоскости ζ. По принципу симметрии функция $\zeta(w)$ допускает аналитическое продолжение в полную окрестность точки a_k и представима там рядом Тейлора $\zeta(w) = c_1(w - a_k) + c_2(w - a_k)^2 + \ldots$. В этом ряду отсутствует свободный член, ибо $\zeta(a_k) = 0$, но $c_1 = \zeta'(a_k) \neq 0$, т.к. функция осуществляет конформное отображение. Возвращаясь к функции $f(w)$, будем иметь

$$f(w) = A_k + (w - a_k)^{\alpha_k}(c_1 + c_2(w - a_k) + \ldots)^{\alpha_k} = A_k + (w - a_k)^{\alpha_k} h_k(w)$$

Здесь $h_k(w)$ – однозначная голоморфная ветвь функции $(c_1 + c_2(w - a_k) + \ldots)^{\alpha_k}$.

Прообразы трех вершин многоугольника можно выбирать произвольно. После этого все остальные точки a_k и постоянные C, C_1 фиксируются однозначно. Если выбрать $a_n = \infty$, интеграл Кристоффеля-Шварца принимает вид

$$f(w) = C \int_{w_0}^{w} (u - a_1)^{\alpha_1 - 1}(u - a_2)^{\alpha_2 - 1} \ldots (u - a_{n-1})^{\alpha_{n-1} - 1} du + C_1$$

Пример: треугольник. Найдем конформное отображение $z = f(w)$ верхней полуплоскости на треугольник с вершинами в точках $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, A_3 ($\operatorname{Im} A_3 > 0$) и углами в вершинах $\pi\alpha_i$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Положим $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$. Имеем

$$f(w) = C \int_0^w u^{\alpha_1 - 1}(u - 1)^{\alpha_2 - 1} du = A \int_0^w u^{\alpha_1 - 1}(1 - u)^{\alpha_2 - 1} du$$

Из условия того, что точка $a_2 = 1$ отображается в $A_2 = 1$ находим постоянную A через бета-функцию:

$$1 = A \int_0^1 u^{\alpha_1 - 1}(1 - u)^{\alpha_2 - 1} du = AB(\alpha_1, \alpha_2)$$

Пример: прямоугольник. Найдем конформное отображение $z = f(w)$ верхней полуплоскости на прямоугольник с вершинами в точках $A_1 = K$, $A_2 = K + iK'$, $A_3 = -K + iK'$, $A_4 = -K$ ($K, K' > 0$). Из симметрии ясно, что соответствие точек можно выбрать следующим образом: $0 \leftrightarrow 0$, $A_1 \leftrightarrow 1$, $A_4 \leftrightarrow -1$, $A_2 \leftrightarrow 1/k$, $A_3 \leftrightarrow -1/k$. Тогда

$$z(w) = C \int\limits_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}$$

Постоянные C, k определяются из равенств

$$K = C \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}$$

$$K+iK'=C\int\limits_0^1+C\int\limits_1^{1/k}=K+iC\int\limits_1^{1/k}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

Будем считать k заданным, а размеры прямоугольника выбранными так, чтобы постоянная C была бы равна 1. Тогда отображение верхней полуплоскости на прямоугольник с

$$K=\int\limits_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\qquad K'=\int\limits_1^{1/k}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

дается функцией

$$f(w)=\int\limits_0^w\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

Обратная ей функция есть эллиптический синус $\operatorname{sn}(z)=\operatorname{sn}(z,k)$.

25 Модулярная функция

Рассмотрим круговой треугольник $T_0=ABC$, образованный дугами окружностей, ортогональных к единичной окружности. По теореме Римана существует единственное конформное отображение $w=\mu(z)$ этого треугольника на верхнюю полуплоскость, переводящее точки A,B,C соответственно в $0,1,\infty$. По принципу симметрии функцию μ можно аналитически продолжить в треугольники $T_1^{(k)}$, $k=1,2,3$, симметричные с T_0 относительно его сторон. Точки, симметричные вершинам относительно сторон, противоположных этим вершинам, также лежат на единичной окружности. (В самом деле, единичная окружность перейдет в себя, поскольку она ортогональна стороне треугольника, и тогда при симметрии относительно, например, стороны BC (инверсии) образ точки A будет лежать на единичной окружности.) По свойствам инверсии стороны треугольников $T_1^{(k)}$ снова будут дугами окружностей, ортогональных единичной окружности.

Продолженная функция μ конформно отображает каждый из треугольников $T_1^{(k)}$ на нижнюю полуплоскость. При этом, например, 4-угольник $T_0\cup T_1^{(1)}$ отображается на всю плоскость с удаленным из нее разрезом, который является образом двух других сторон (отличных от той, через которую продолжали). К продолженной функции μ можно снова применить принцип симметрии и продолжить ее в треугольники $T_2^{(k)}$, которые получаются из $T_1^{(k)}$ инверсией относительно их сторон.

Повторяя этот процесс неограниченно, мы построим голоморфную в единичном круге U функцию μ, которая называется *модулярной функцией*. Она не продолжаема за пределы U. В самом деле, на единичной окружности всюду плотны множества точек, получающиеся отражениями каждой из вершин треугольника T_0; но когда z стремится по соответствующему треугольнику к точке A_n, получающейся отражениеми вершины A, то $\mu(z)\to 0$, а когда z стремится к B_n или C_n, то $\mu(z)$ стремится к 0 или ∞. Таким образом, μ нельзя продолжить на $\bar U$ даже непрерывно.

Из построения ясно, что модулярная функция не принимает в U трех значений: 0,1 и ∞.

Заметим, далее, что четное число отражений относительно дуг окружностей (инверсий) сводится к дробно-линейному преобразованию, которое к тому же является автоморфизмом U. Такие преобразования образуют группу $\Lambda \subset \operatorname{Aut} U$.

Модулярная функция является инвариантной относительно преобразований из группы Λ (т.е. является автоморфной функцией). В самом деле, пусть $G \in \Lambda$ – произвольное отображение и $z \in U$ – произвольная точка; z принадлежит некоторому треугольнику T из описанных выше (точнее, его замыканию в U), и функция μ конформно отображает его на верхнюю или нижнюю полуплоскость, причем вершины переходят в точки $0, 1, \infty$. По построению функция μ отображает треугольник $G(T)$ на ту же полуплоскость, причем соответствующие точки снова переходят в $0, 1, \infty$. Поэтому μ и $\mu \circ G$ конформно отображают T на одну и ту же полуплоскость с одинаковым соответствием трех граничных точек. Следовательно, $\mu = \mu \circ G$.

Опишем аналитическую функцию, обратную к модулярной. Рассмотрим ее ветвь $z = \mu^{-1}(w)$, голоморфную в верхней полуплоскости и отображающую ее на треугольник T_0. По принципу симметрии эта ветвь продолжается в нижнюю полуплоскость через каждый из интервалов $(0, 1)$, $(1, \infty)$, $(-\infty, 0)$. Каждую из продолженных ветвей можно снова продолжить в верхнюю полуплоскость через любой из этих интервалов. При этом если второе продолжение происходит через другой интервал, чем первое, то полученная ветвь отличается от начальной. Этот процесс продолжения можно вести неограниченно. Аналитическая функция, обратная к модулярной, бесконечнозначна. Точки $0, 1, \infty$ являются ее логарифмическими точками ветвления. Все значения этой функции лежат в единичном круге.

Теорема Пикара. На существовании функции, обратной к модулярной, основано простое доказательство теоремы Пикара.

Теорема (Пикар). *Целая функция, отличная от постоянной, принимает все (конечные) комплексные значения кроме, быть может, одного.*

Доказательство. Пусть целая функция f не принимает двух значений $a, b \in \mathbb{C}$. Тогда функция

$$g(z) = \frac{f(z) - a}{b - a}$$

тоже целая и не принимает значений 0,1. В окрестности произвольной точки $z_0 \in \mathbb{C}$ голоморфна функция $\varphi = \mu^{-1} \circ g$, где μ^{-1} – какая-либо ветвь функции, обратной к модулярной. Так как функция g не принимает значений $0, 1, \infty$ (которые являются особыми точками для функции μ^{-1}), то функция φ продолжаема вдоль любого пути $\gamma \subset \mathbb{C}$. Так как $\mathbb{C}$ односвязна, то по теореме о монодромии функция φ голоморфна и однозначна в $\mathbb{C}$, т.е. является целой функцией. Но все значения μ^{-1} лежат в единичном круге. Следовательно, φ ограничена и, по теореме Лиувилля, постоянна. Но тогда и g, а, значит, и f постоянна. ∎

Теорема Пикара обобщается и на произвольные мероморфные функции.

Теорема (Пикар). *Любая мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, отличная от постоянной, принимает все комплексные значения из $\overline{\mathbb{C}}$ кроме, быть может, двух.*

Доказательство. Пусть f – мероморфная функция, не принимающая трех различных значений $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$. Эти значения можно считать конечными, ибо если бы какое-нибудь из них было бесконечным, f была бы целой функцией, не принимающей двух значений, т.е. постоянной (по предыдущей теореме). Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c}$$

Она, очевидно, целая (ибо $f \neq c$) и не принимает значений $\frac{1}{a-c}$, $\frac{1}{b-c}$. По предыдущей теореме g постоянна, но тогда и f постоянна. ∎

Можно доказать, что свойство мероморфных функций принимать все значения кроме, быть может, двух, является локальным свойством их поведения на бесконечности. Имеет место *большая теорема Пикара*, по которой любая функция в любой сколь угодно малой окрестности предельной точки ее полюсов принимает все значения кроме, быть может, двух. Точно также в любой окрестности своей существенно особой точки любая функция принимает все конечные значения кроме, быть может, одного (усиление теоремы Сохоцкого).

26 Гармонические функции

Уравнение Лапласа и свойства гармонических функций. *Гармонической* в области D функцией называется вещественнозначная функция $u(x, y)$, обладающая в этой области непрерывными вторыми частными производными и удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Здесь $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial_z \partial_{\bar{z}}$ – оператор Лапласа.

Между гармоническими и голоморфными функциями существует тесная связь.

Теорема. *Действительная и мнимая части функции $f = u + iv$, однозначной и голоморфной в области D, являются в этой области гармоническими функциями.*

Доказательство. Это прямо следует из условий Коши-Римана $u_x = v_y$ и $u_y = -v_x$:

$$u_{xx} + u_{yy} = (v_y)_x + (-v_x)_y = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = (-u_y)_x + (u_x)_y = 0$$

Отметим, что возможность дифференцировать условия Коши-Римана вытекает из того, что голоморфная функция обладает производными всех порядков. ∎

Две гармонические функции u, v, связанные условиями Коши-Римана, называются *сопряженными*.

Теорема. *Для всякой функции $u(x, y)$, гармонической в односвязной области D, можно найти сопряженную с ней гармоническую функцию $v(x, y)$ (а значит, и голоморфную функцию f такую, что $u = \operatorname{Re} f$).*

Доказательство. Мы имеем $\Delta u = 4\partial_{\bar{z}}(\partial_z u) = 0$, откуда заключаем, что функция $2\partial_z u = u_x - iu_y$ голоморфна в D. В односвязной области D она имеет первообразную

$f = U + iV$. Тогда
$$f' = u_x - iu_y = U_x + iV_x = U_x - iU_y$$
(последнее равенство следует из условий Коши-Римана для U, V). Отсюда заключаем, что $U_x = u_x$, $U_y = u_y$ или $(U-u)_x = (U-u)_y = 0$ в D. Это означает, что $U - u = \mathrm{const}$. Вычитая эту константу из f, получим голоморфную в D функцию, для которой $\operatorname{Re} f = u$, а $\operatorname{Im} f = v$ – сопряженная гармоническая функция. ■

В неодносвязной области существуют гармонические функции, не являющиеся вещественными частями голоморфных. Например, $\mathsf{D} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $u = \log|z| = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$. Тогда функция $2\partial_z u = 1/z$ не имеет однозначной первообразной в D. Сопряженная гармоническая функция в этом случае многозначна (равна $\arg z$).

Некоторые свойства гармонических функций легко получаются из соответствующих свойств голоморфных функций.

- Бесконечная дифференцируемость: *Гармоническая функция обладает частными производными всех порядков, причем все они тоже гармоничны.*

  Это следует из бесконечной дифференцируемости f.

- Теорема о среднем: $u(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi})d\varphi$.

- Принцип максимума: *Отличная от постоянной гармоническая функция не может достигать экстремума во внутренней точке области определения.*

  Это достаточно доказать для максимума (ибо минимум u является максимумом для $-u$). Предположим противное – что максимум достигается во внутренней точке z_0. В окрестности z_0 рассмотрим однозначную голоморфную функцию $f(z)$ такую, что $\mathrm{Re} f = u$. Функция e^f голоморфна, а ее модуль достигает максимума в z_0, что невозможно по принципу максимума модуля.

- Аналог теоремы Лиувилля: *Если функция u гармонична на $\mathbb{C}$ и ограничена сверху ($u(z) \le M$), то $u = \mathrm{const}$.*

  Это следует из теоремы Лиувилля, примененной к $g = e^f$ ($|g| \le e^M$ везде в $\mathbb{C}$).

Вот еще некоторые простые свойства гармонических функций.

Теорема. *Если функция $u(z)$ гармонична в области D и $z = g(\zeta)$ – голоморфная в некоторой области G функция, значения которой лежат в D, то сложная функция $u(g(\zeta))$ гармонична в G.*

Доказательство. Рассмотрим (быть может, многозначную) голоморфную функцию $f(z)$, для которой $u = \mathrm{Re} f$. Функция $F(\zeta) = f(g(\zeta))$ голоморфна в G, и, следовательно, $U(\zeta) = \mathrm{Re} f(g(\zeta)) = \mathrm{Re} F(\zeta)$ гармонична в G. ■

Теорема единственности для голоморфных функций не переносится полностью на гармонические, ибо гармонические функции, совпадающие на линиях, вовсе не обязаны совпадать в области. (Например, на линиях уровня они принимают постоянные значения, сами не будучи постоянными.) Тем не менее справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если две функции, гармонические в области* D, *совпадают в какой-либо области* $\mathsf{D}_1 \subset \mathsf{D}$, *то они совпадают и везде в* D.

Доказательство. Разность u этих функций гармонична и равна 0 в D_1. Рассмотрим (быть может, многозначную) голоморфную функцию $f(z)$, для которой $u = \mathrm{Re} f$. В области D_1 сопряженная с u гармоническая функция v постоянна в силу условий Коши-Римана. Следовательно, f постоянна в D_1, а значит, и во всей области D. Но тогда и u постоянна в D и равна там, следовательно, нулю. ■

Интегральные формулы для гармонических функций. Начнем с совсем простого утверждения.

Теорема. *Если функция* $u(z)$ *гармонична в односвязной области* D *и непрерывна вместе со своими частными производными в* $\overline{\mathsf{D}}$, *то*

$$\oint_{\partial \mathsf{D}} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0$$

где $\partial/\partial n$ *– производная по нормали, а* ds *– дифференциал дуги.*

Доказательство. Рассмотрим в $\overline{\mathsf{D}}$ сопряженную к u гармоническую функцию v; она однозначна в силу односвязности D. Пользуясь условиями Коши-Римана в виде

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial s}$$

заключаем, что $\oint_{\partial \mathsf{D}} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \oint_{\partial \mathsf{D}} \frac{\partial v}{\partial s}\, ds = \oint_{\partial \mathsf{D}} dv = 0.$ ■

В дальнейшем используется следующий вариант формулы Грина. Для любых дважды непрерывно дифференцируемых в области D функций f, g справедлива интегральная формула

$$\oint_{\partial \mathsf{D}} f \partial_n g\, ds = \iint_{\mathsf{D}} (\nabla f \cdot \nabla g) dxdy + \iint_{\mathsf{D}} f \Delta g\, dxdy$$

Отсюда сразу следует, что если u_1, u_2 – гармонические функции в D, то

$$\oint_{\partial \mathsf{D}} u_1 \frac{\partial u_2}{\partial n}\, ds = \oint_{\partial \mathsf{D}} u_2 \frac{\partial u_1}{\partial n}\, ds$$

Теорема. *Пусть* $u(z)$ *– гармоническая функция в* D, *тогда*

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\partial \mathsf{D}} \Big(u(z) \partial_n \log|z-a| - \partial_n u(z) \log|z-a| \Big) ds = \begin{cases} u(a) & \text{при } a \in \mathsf{D} \\ 0 & \text{при } a \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathsf{D}} \end{cases}$$

где нормаль направлена наружу области.

Доказательство. Результат при $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathsf{D}}$ сразу следует из предыдущей формулы, т.к. $\log|z-a|$ в этом случае гармоническая функция. Пусть $a \in \mathsf{D}$. Вырежем вокруг точки a маленький круг $U_\rho = \{|z-a| < \rho\}$ и применим только что доказанную формулу к области $\mathsf{D}_\rho = \mathsf{D} \setminus U_\rho$:

$$\oint_{\partial \mathsf{D}_\rho} \Big(u(z) \partial_n \log|z-a| - \partial_n u(z) \log|z-a| \Big) ds = 0$$

Выписав отдельно интегралы по каждой компоненте границы, будем иметь (с учетом направления нормали):

$$\oint_{\partial \mathsf{D}} \Big(u(z)\partial_n \log|z-a| - \partial_n u(z)\log|z-a|\Big)ds$$

$$= \oint_{\partial U_\rho} u(z)\partial_n \log|z-a|\,ds - \oint_{\partial U_\rho} \partial_n u(z)\log|z-a|\,ds$$

Поскольку $\log|z-a| = \rho$ на границе круга, второй интеграл в правой части равен 0. В первом интеграле имеем $\partial_n \log|z-a| = \partial_r \log r\,\Big|_{r=\rho} = 1/\rho$. Следовательно,

$$\oint_{\partial \mathsf{D}} \Big(u(z)\partial_n \log|z-a| - \partial_n u(z)\log|z-a|\Big)ds = \frac{1}{\rho}\oint_{\partial U_\rho} u(z)\,ds = 2\pi u(a)$$

поскольку левая часть не меняется при $\rho \to 0$. ■

Задача Дирихле и функция Грина. Формулировка краевой задачи Дирихле следующая. Дана область D с простой границей и непрерывная функция $h : \partial\mathsf{D} \to \mathbb{R}$. Требуется найти гармоническую в D и непрерывную в $\overline{\mathsf{D}}$ функцию u такую, что $u = h$ на границе.

Из принципа максимума для гармонических функций легко следует, что задача Дирихле может иметь не более одного решения. В самом деле, пусть $u_{1,2}$ – два решения с одной и той же граничной функцией. Тогда $u = u_1 - u_2$ есть гармоническая в D функция, равная 0 на границе. По принципу максимума, примененного к u и $-u$, она равна 0 и везде в области, т.е. $u_1 = u_2$.

Общее решение задачи Дирихле выражается с помощью *функции Грина* области D. Функцией Грина G области D называется функция $G(z,\zeta)$ на $\overline{\mathsf{D}} \times \overline{\mathsf{D}}$ такая, что

а) Функция $g(z,\zeta) = G(z,\zeta) - \log|z-\zeta|$ гармонична по z при любом ζ и гармонична по ζ при любом z;

б) $G(z,\zeta) = G(\zeta,z)$, и $G(z,\xi) = 0$ при всех $z \in \mathsf{D}$ и $\xi \in \overline{\mathsf{D}}$.

Тот же аргумент, что и выше, показывает, что функция Грина единственна. Для доказательства ее существования воспользуемся биголоморфным отображением $w : \mathsf{D} \to U$ области D на единичный диск, существующим в силу теоремы Римана. Легко проверяется, что выражение

$$G(z,\zeta) = \log\left|\frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(z)\overline{w(\zeta)}}\right|$$

удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к функции Грина. Отметим, что функция Грина не зависит от нормировки конформного отображения $w(z)$.

Для гармонической в $\overline{\mathsf{D}}$ функции u справедлива формула

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\partial \mathsf{D}} u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}G(z,\xi)|d\xi|$$

которая связывает граничные значения функции с ее значениями во внутренности и тем самым подсказывает формулу для решения задачи Дирихле. Чтобы убедиться в справедливости этой формулы, запишем

$$G(z,\zeta) = \log|z-\zeta| + g(z,\zeta)$$

положим для краткости $\log|z-\xi| = \log r$ и воспользуемся интегральными формулами для гармонических функций:

$$\oint_{\partial \mathsf{D}} \Big(u\partial_n G - G\partial_n u)|d\xi| = \underbrace{\oint_{\partial \mathsf{D}} \Big(u\partial_n \log r - \partial_n u \log r\Big)|d\xi|}_{2\pi u(z)} + \underbrace{\oint_{\partial \mathsf{D}} \Big(u\partial_n g - g\partial_n u)|d\xi|}_{0} = 2\pi u(z)$$

Остается вспомнить, что $G(z,\xi) = 0$ при $\xi \in \partial\mathsf{D}$. В частности, при $u = 1$ имеем формулу

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial \mathsf{D}} \frac{\partial}{\partial n} G(z,\xi)|d\xi| = 1$$

Выражение $P(z,\xi) = \partial_{n_\xi} G(z,\xi)$ (где $\xi \in \partial\mathsf{D}$) называется ядром Пуассона.

Пусть $\nu = n_x + in_y$ – единичный нормальный вектор к кривой $\gamma = \partial\mathsf{D}$, представленный как комплекное число. Его можно выразить через конформное отображение $w(z)$ области D на единичный круг:

$$\nu(z) = -i\frac{dz}{|dz|} = -i\frac{dz}{dw}\,\frac{dw}{|dz|} = -i\frac{1}{w'(z)}\,\frac{dw\,w}{w|dz|} = \frac{|w'(z)|w(z)}{w'(z)}$$

(т.к. $|dw| = -idw/w$). Вычислив нормальную производную от G согласно правилу $\partial_n = n_x\partial_x + n_y\partial_y = \nu\partial_z + \bar\nu\partial_{\bar z}$, будем иметь

$$P(z,\xi) = |w'(\xi)|\,\frac{1-|w(z)|^2}{|w(\xi)-w(z)|^2}$$

Задача Дирихле в единичном диске. Для единичного диска функция Грина выражается явной формулой $G(z,\zeta) = \left|\dfrac{z-\zeta}{1-z\bar\zeta}\right|$, а ядро Пуассона

$$P(z,e^{i\theta}) = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} = \mathrm{Re}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}, \quad z = re^{i\varphi}$$

Согласно доказанной выше интегральной формуле,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,e^{i\theta})d\theta = 1 \quad \text{для всех } z \in U$$

Докажем, что в единичном диске U задача Дирихле восстановления гармонической функции u по ее граничному значению h решается формулой Пуассона

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}\,h(e^{i\theta})d\theta$$

Функция h предполагается равномерно непрерывной на единичной окружности.

Надо доказать, что а) функция u – гармоническая в U, б) $\lim\limits_{z\to\zeta_0} u(z) = h(\zeta_0)$, $|\zeta_0| = 1$. Утверждение а) следует из того, что функция u совпадает с вещественной частью функции

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, u(e^{i\theta})d\theta$$

голоморфной в U.

Остается показать, что при z стремящемся по точкам U к произвольной точке $\zeta_0 = e^{i\theta_0} \in \partial U$, значение $u(z)$ стремится к $h(e^{i\theta_0})$. Вспомнив, что $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})d\theta = 1$, запишем разность между функцией $u(z)$ и ее предполагаемым пределом в виде

$$u(z) - h(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})\Big(h(e^{i\theta}) - h(e^{i\theta_0})\Big)d\theta$$

В силу равномерной непрерывности функции h для любого $\varepsilon > 0$ существует δ такое, что для всех θ и θ_0 таких, что $|\theta - \theta_0| < \delta$ имеем

$$|h(e^{i\theta}) - h(e^{i\theta_0})| < \varepsilon$$

Перепишем наш интеграл в виде $u(z) - h(e^{i\theta_0}) = I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} P(z, e^{i\theta})\Big(h(e^{i\theta}) - h(e^{i\theta_0})\Big)d\theta$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{\theta_0-\delta} + \int\limits_{\theta_0+\delta}^{2\pi}\right) P(z, e^{i\theta})\Big(h(e^{i\theta}) - h(e^{i\theta_0})\Big)d\theta$$

На основании формулы $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})d\theta = 1$, интеграл I_1 оценивается как $|I_1| < \varepsilon$. Положим $M = \max|h(e^{i\theta})|$. После выбора δ возьмем z настолько близким к $e^{i\theta_0}$, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_0^{\theta_0-\delta} + \int\limits_{\theta_0+\delta}^{2\pi}\right) \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}\, d\theta < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Тогда $|I_2| < \varepsilon$.

Ядро Шварца. Формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, u(e^{i\theta})d\theta$$

восстанавливает голоморфную в единичном круге функцию по ее вещественной части на единичной окружности. (Ядро в этой интегральной формуле называется ядром Шварца.)

В общем случае можно ввести функцию $H(z, \zeta)$, гармонически сопряженную функции Грина $G(z, \zeta)$ по переменной z и положить $F(z, \zeta) = G(z, \zeta) + iH(z, \zeta)$.

Тогда ядро Шварца для произвольной области выразится как $S(z,\xi) = \partial_{n_\xi} F(z,\xi)$ (здесь $z \in \mathsf{D}$, $\xi \in \partial\mathsf{D}$). Вычислив нормальную производную от

$$F(z,\zeta) = \log \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - w(z)\overline{w(\zeta)}}$$

найдем ядро Шварца для произвольной области:

$$S(z,\xi) = |w'(\xi)| \, \frac{w(\xi) + w(z)}{w(\xi) - w(z)}$$

Формула Адамара. Существует замечательная формула, выражающая изменение функции Грина задачи Дирихле при малой вариации области через саму функцию Грина. Вот идея ее вывода. Будем описывать малые вариации области D с помощью нормального смещения ее границы $\delta n(\xi)$, $\xi \in \partial\mathsf{D}$. (Считаем, что $\delta n > 0$, если граница смещается наружу.) Рассмотрим разность функций Грина новой и старой областей:

$$\delta G(z,\zeta) = G_1(z,\zeta) - G(z,\zeta)$$

На границе новой области D_1 имеем $G_1(z,\xi) = 0$, $\xi \in \mathsf{D}_1$. Старая функция Грина в этой точке равна, очевидно, $\partial_n G(z,\xi)\delta n(\xi)$ (в первом порядке по δn). Заметим, что $\delta G(z,\zeta)$ – гармоническая по ζ функция (особенность при $\zeta = z$ сокращается) с граничным значением $-\partial_n G(z,\xi)\delta n(\xi)$. Поэтому мы можем выразить ее везде в области через функцию Грина, решив задачу Дирихле:

$$\delta G(z,\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\mathsf{D}} \partial_n G(z,\xi) \partial_n G(\zeta,\xi) \, \delta n(\xi) |d\xi|$$

Это и есть формула Адамара. Ее можно переписать для функции $F(z,\zeta)$ через ядро Шварца в виде

$$\delta F(z,\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\mathsf{D}} S(z,\xi) \partial_n G(\zeta,\xi) \, \delta n(\xi) |d\xi|$$

Предположим, что $0 \in \mathsf{D}$ и нормируем наше конформное отображение следующим образом: $w(0) = 0$, $\arg w'(0) > 0$. Положив $\zeta = 0$, будем иметь $F(z,0) = \log w(z)$. Учтя, что $\partial_n \log |w(z)| = |w'(z)|$ для $z \in \partial\mathsf{D}$, получим формулу для вариации конформного отображения:

$$\delta \log w(z) = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\mathsf{D}} \frac{w(\xi) + w(z)}{w(\xi) - w(z)} |w'(\xi)|^2 \, \delta n(\xi) |d\xi|$$

В частности, если деформированная область отличается от исходной маленькой "шишечкой" площади ε в точке ξ_0 границы, то независимо от формы шишечки в первом порядке по ε имеем

$$\delta \log w(z) = -\frac{\varepsilon}{2\pi} |w'(\xi_0)|^2 \, \frac{w(\xi_0) + w(z)}{w(\xi_0) - w(z)}$$

($\varepsilon > 0$ если площадь деформированной области увеличивается и $\varepsilon < 0$ в противном случае). Разумеется, эту формулу можно применять, если только точка z не слишком близка к ξ_0.

27 Производящая функция конформных отображений

Теорема Римана – чистая теорема существования, ничего не говорящая о том, как найти конформное отображение данной области на круг. Относительно недавно стало понятно, что для областей с аналитической границей можно дать, по крайней мере в принципе, более конструктивный рецепт построения искомого отображения. А именно, у конформных отображений существует производящая функция, зависящая от бесконечного числа переменных, такая, что вся информация о конформных отображениях областей с аналитической границей содержится в ее производных по этим переменным. Этот сюжет тесно связан с теорией интегрируемых систем.

В этом разделе нам будет удобно рассматривать конформные отображения *внешности* ограниченной области D на внешность единичного круга. Обозначим $\mathsf{D}^{\mathsf{c}} = \overline{\mathbb{C}} \setminus (\mathsf{D} \cup \partial \mathsf{D})$. Нормируем конформное отображение условиями $w(\infty) = \infty$, $w'(\infty) > 0$. Разложение функции $w(z)$ в окрестности ∞ таково:

$$w(z) = \frac{z}{r} + u_0 + \frac{u_1}{z} + \frac{u_2}{z^2} + \dots$$

Здесь $u_i \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+$. Константа r называется (внешним) конформным радиусом области D.

Рассмотрим пространство всех содержащих 0 односвязных ограниченных областей D с аналитической границей. В качестве координат в этом бесконечномерном пространстве возьмем площадь области D и гармонические моменты области D^{c}:

$$t_0 = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathsf{D}} dxdy, \qquad t_k = -\frac{1}{\pi k} \iint_{\mathsf{D}^{\mathsf{c}}} z^{-k} \, dxdy \quad (k \geq 1)$$

По теореме Стокса их можно представить как контурные интегралы

$$t_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \bar{z} dz, \qquad t_k = \frac{1}{2\pi i k} \oint_\gamma z^{-k} \bar{z} dz, \qquad k \geq 1.$$

Отметим, что t_0 вещественно, а t_k при $k \geq 1$ вообще говоря комплексны, так что координатами являются t_0, $\{\operatorname{Re} t_k\}$, $\{\operatorname{Im} t_k\}$ или t_0, $\{t_k\}$, $\{\bar{t}_k\}$.

Теорема. *Любая однопараметрическая деформация $\mathsf{D}(t)$ области $\mathsf{D} = \mathsf{D}(0)$, сохраняющая все величины t_k (т.е. такая, что $\partial_t t_k = 0$ для всех k), тривиальна: $D(t) = D(0)$.*

Доказательство. Пусть $\mathsf{D}(t)$ – деформация с вещественным параметром t. Зададим замкнутую кривую $\gamma(t) = \partial \mathsf{D}(t)$ параметрически $z(\sigma, t) = x(\sigma, t) + iy(\sigma, t)$ $(0 \leq \sigma < 2\pi)$ и определим нормальную скорость деформации $V_n(z) = \delta n(z)/\delta t$, $z \in \gamma$. Пусть

$$\vec{\tau} = \left(\frac{dx}{|dz|}, \frac{dy}{|dz|} \right), \qquad \vec{n} = \left(\frac{dy}{|dz|}, -\frac{dx}{|dz|} \right)$$

касательный и нормальный единичные векторы к кривой γ, а $\vec{U} = (x_t, y_t)$ – скорость точки кривой (производные здесь берутся при постоянном σ). Тогда имеем

$V_n = (\vec{n}, \vec{U}) = \left(\dfrac{dyx_t}{|dz|}, -\dfrac{dxy_t}{|dz|}\right) = \dfrac{d\sigma}{|dz|}(x_t y_\sigma - x_\sigma y_t)$. В терминах $z, \bar{z}$ запишем эту формулу в виде

$$V_n = \frac{d\sigma}{2i|dz|}(\bar{z}_t z_\sigma - \bar{z}_\sigma z_t)$$

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$C(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\bar{z}\,dz}{z-a}$$

Значения этой функции при $a \in \mathsf{D}$ и $a \in \mathsf{D}^{\mathsf{c}}$ обозначим соответственно $C^+(a)$ и $C^-(a)$. Найдем производную по t функции $C(a)$ прямым дифференцированием:

$$\begin{aligned} 2\pi i \partial_t C(a) &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\bar{z}_t z_\sigma + \bar{z} z_{\sigma,t}}{z-a} - \frac{\bar{z} z_t z_\sigma}{(z-a)^2}\right) d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\bar{z}_t z_\sigma + \bar{z} z_{\sigma,t}}{z-a}\, d\sigma + \bar{z} z_t d\Big(\frac{1}{z-a}\Big)\right) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\bar{z}_t z_\sigma - z_t \bar{z}_\sigma}{z-a}\, d\sigma \end{aligned}$$

Используя выражение для скорости нормальной деформации кривой запишем результат в виде

$$\partial_t C(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{V_n(z)|dz|}{z-a}$$

где $V_n(z) \in \mathbb{R}$. Согласно формулам Сохоцкого-Племеля, скачок функции $\partial_t C$ на границе равен

$$\partial_t C^+(z) - \partial_t C^-(z) = 2i\frac{V_n(z)}{\tau(z)}$$

где $\tau(z) = dz/|dz| = i\nu(z) = i\dfrac{|w'(z)|\,w(z)}{w'(z)}$ – единичный касательный вектор к кривой γ, представленный как комплексное число.

В достаточно малой окрестности точки 0, в которой $|a| < |z|$ для всех $z \in \gamma$, можно разложить подынтегральное выражение для производной $\partial_t C^+$ и почленно проинтегрировать:

$$\partial_t C^+(a) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty} a^k \oint_\gamma z^{-k-1}\bar{z} dz\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k(\partial_t t_k) a^{k-1} = 0$$

поскольку по условию $\partial_t t_k = 0$ для всех $k \geq 1$. Отсюда в силу единственности аналитического продолжения заключаем, что $\partial_t C^+ = 0$ везде в области D. Поэтому из формулы для скачка видим, что

$$2i\frac{V_n(z)}{\tau(z)} = 2\frac{V_n(z) w'(z)}{|w'(z)|\,w(z)}$$

является граничным значением аналитической функции $h(z) := -\partial_t C^-(z)$ в области D^{c}. При этом разложение в окрестности ∞

$$h(z) = \partial_t C^-(z) = \frac{\partial_t t_0}{z} + O(z^{-2}) = O(z^{-2})$$

показывает, что $h(z)$ имеет в ∞ ноль как минимум второго порядка. Поскольку $w'(z) \neq 0$ в $\mathsf{D^c}$, функция $g(z) := h(z)\dfrac{w(z)}{w'(z)}$ голоморфна в этой области, имеет вещественные граничные значения $2\dfrac{V_n(z)}{|w'(z)|}$ и равна 0 в ∞. Мнимая часть этой функции гармонична в $\mathsf{D^c}$ и равна 0 на границе. В силу единственности решения задачи Дирихле она равна 0 в $\mathsf{D^c}$. Следовательно, $g(z)$ принимает чисто вещественные значения, а, значит, равна константе. Устремив $z \to \infty$, видим, что константа равна 0.

Тем самым мы доказали, что $V_n(z) = \delta n(z)/\delta t = 0$, что и означает отсутствие деформации. ∎

Разложения функций $C^{\pm}$ в ряд Тейлора в 0 и ∞ имеют вид

$$C^+(z) = \sum_{k\geq 1} k t_k z^{k-1}, \qquad C^-(z) = -\frac{t_0}{z} - \sum_{k\geq 1} v_k z^{-k-1}$$

где

$$v_k = \frac{1}{\pi}\iint_{\mathsf{D}} z^k\, dxdy = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma z^k \bar z\, dz$$

дополнительный набор гармонических моментов (моменты внутренности). Они являются функциями от $\{t_k\}$.

Рассмотрим инфинитезимальные деформации специального вида. Для фиксированной точки $a \in \mathsf{D^c}$ положим

$$\delta n(z) = -\frac{\epsilon}{2}\,\partial_n G(a,z), \qquad \epsilon \to 0.$$

Пусть $\mathcal{X}$ – какой-либо функционал от области. Через $\delta_a \mathcal{X}$ обозначим его изменение при указанной деформации.

Лемма. *Для функционалов вида* $\mathcal{X}(\mathsf{D}) = \iint_{\mathsf{D^c}} f(x,y)\, dxdy$ *имеем*

$$\delta_z \mathcal{X} = -\pi\epsilon f^H(z)$$

где f^H *– гармоническое продолжение функции* f *с границы во внешность* $\mathsf{D^c}$ *области* D.

Доказательство. Вариация функционала $\mathcal{X}$ при произвольной деформации δn есть $\delta\mathcal{X} = -\oint_\gamma f\delta n\,|d\xi|$. Подставляя сюда выражение для δn через функцию Грина, имеем

$$\delta_z\mathcal{X} = \frac{\epsilon}{2}\oint_\gamma f\partial_n G(z,\xi)\,|d\xi| \;=\; -\pi\epsilon f^H(z)$$

в силу формулы для решения задачи Дирихле в области $\mathsf{D^c}$. ∎

Как следствие получаем формулы для вариаций гармонических моментов:

$$\delta_z t_0 = \epsilon, \qquad \delta_z t_k = \frac{\epsilon}{k}\, z^{-k}, \qquad \delta_z \bar t_k = \frac{\epsilon}{k}\,\bar z^{-k}$$

Аналогично, для функционалов вида $\mathcal{X}(\mathsf{D}) = \iint_{\mathsf{D}} f(x,y)\,dxdy$, где функция f определена в некоторой области, содержащей область D, имеем $\delta_z \mathcal{X} = \pi\epsilon f^H(z)$.

Функционалы от области D (или D^{c}) можно рассматривать как функции от переменных $t_0, t_k, \bar{t}_k$. Введем дифференциальные операторы

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t_0}, \qquad D(z) = \sum_{k\geq 1} \frac{z^{-k}}{k}\frac{\partial}{\partial t_k}, \qquad \bar{D}(\bar{z}) = \sum_{k\geq 1} \frac{\bar{z}^{-k}}{k}\frac{\partial}{\partial \bar{t}_k}$$

$$\nabla(z) = \partial_0 + D(z) + \bar{D}(\bar{z})$$

Лемма. *Для любого функционала $\mathcal{X}$ от области имеем $\delta_z \mathcal{X} = \epsilon \nabla(z)\mathcal{X}$.*
Доказательство.

$$\begin{aligned} \delta_z \mathcal{X} &= \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t_0} + \sum_{k\geq 1} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t_k}\,\delta_z t_k + \sum_{k\geq 1} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \bar{t}_k}\,\delta_z \bar{t}_k \\ &= \epsilon \partial_0 \mathcal{X} + \epsilon \sum_{k\geq 1} \frac{z^{-k}}{k}\,\partial_{t_k}\mathcal{X} + \epsilon \sum_{k\geq 1} \frac{\bar{z}^{-k}}{k}\,\partial_{\bar{t}_k}\mathcal{X} \\ &= \epsilon \nabla(z)\mathcal{X} \end{aligned}$$

■

Рассмотрим функционал

$$F = -\frac{1}{\pi^2}\iint_{\mathsf{D}}\iint_{\mathsf{D}} \log\Big|\frac{1}{z} - \frac{1}{z'}\Big|\,dxdy\,dx'dy'$$

и найдем его вариацию $\delta_z F$. Для этого введем вспомогательную функцию

$$\phi(\zeta,\bar{\zeta}) = -\frac{2}{\pi}\iint_{\mathsf{D}} \log\Big|\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{z'}\Big|\,dx'dy'$$

Это гармоническая функция в D^{c}. Ее разложение в ∞ имеет вид

$$\phi(\zeta,\bar{\zeta}) = v_0 + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}\Big(v_k \zeta^{-k} + \bar{v}_k \bar{\zeta}^{-k}\Big)$$

где $v_0 = \dfrac{2}{\pi}\iint_{\mathsf{D}} \log|z|\,dxdy$ – логарифмический момент, а вариация $\delta_z\phi(\zeta,\bar{\zeta})$ при $\zeta \in \mathsf{D}$ согласно лемме равна $\delta_z\phi(\zeta,\bar{\zeta}) = -2\epsilon\log\Big|\dfrac{1}{\zeta} - \dfrac{1}{z}\Big|$. Для нахождения вариации функционала F запишем его в виде

$$F = \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathsf{D}} \phi(z,\bar{z})\,dxdy$$

Имеем:

$$\delta_z F = -\frac{\epsilon}{4\pi}\oint_{\gamma} \phi(\zeta,\bar{\zeta})\partial_n G(z,\zeta)|d\zeta| + \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathsf{D}} \delta_z\phi(z',\bar{z}')\,dx'dy'$$

$$= \frac{\epsilon}{2}\,\phi^H(z,\bar z) - \frac{\epsilon}{\pi}\iint_{\mathsf{D}} \log\Big|\frac{1}{z'} - \frac{1}{z}\Big|\, dx'dy' \;=\; \epsilon\phi(z,\bar z)$$

(т.к. $\phi^H = \phi$). Отсюда заключаем, что $\phi(z,\bar z) = \nabla(z)F$, $z \in \mathsf{D}^{\mathsf{c}}$. Сравнивая с разложением функции ϕ, находим

$$v_k = \frac{\partial F}{\partial t_k}, \qquad \bar v_k = \frac{\partial F}{\partial \bar t_k}$$

Найдем теперь $\nabla(z)\nabla(\zeta)F$. Для этого нужно найти $\delta_z\phi(\zeta,\bar\zeta)$ при $\zeta \in \mathsf{D}^{\mathsf{c}}$. Полученный ранее ответ $\delta_z\phi(\zeta,\bar\zeta) = -2\epsilon\log\Big|\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{z}\Big|$ верен только при $\zeta \in \mathsf{D}$ (в этом случае логарифм - гармоническая функция в D^{c}). При $\zeta \in \mathsf{D}^{\mathsf{c}}$ его надо подправить, сократив логарифмическую особенность, и при этом не изменив граничные значения. Это достигается вычитанием из логарифма функции Грина задачи Дирихле:

$$\delta_z\phi(\zeta,\bar\zeta) = -2\epsilon\log\Big|\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{z}\Big| + 2\epsilon G(z,\zeta)$$

Теперь надо вспомнить, что $\delta_z\phi(\zeta,\bar\zeta) = \epsilon\nabla(z)\nabla(\zeta)F$. Мы доказали важную теорему.

Теорема. *Функция Грина задачи Дирихле выражается через функционал F следующим образом:*

$$G(z,\zeta) = \log\left|z^{-1} - \zeta^{-1}\right| + \frac{1}{2}\,\nabla(z)\nabla(\zeta)F$$

■

Устремляя $\zeta \to \infty$ и вспомнив, что $G(z,\infty) = -\log|w(z)|$, получим формулу

$$\log|w(z)|^2 = \log|z|^2 - \partial_0\nabla(z)F$$

из которой, отделяя голоморфную и антиголоморфную части, можно получить формулу для самого конформного отображения. Делается это так. Перепишем нашу формулу в виде

$$\log(w(z)/z) + \partial_0^2 F + D(z)F = -\log(\overline{w(z)}/\bar z) - \bar D(\bar z)F$$

Левая часть – голоморфная функция от z, а правая – антиголоморфная. Следовательно, обе равны константе, значение которой можно найти, устремив $z \to \infty$. Предел $z \to \infty$ в исходном равенстве дает формулу для конформного радиуса

$$\log r^2 = \partial_0^2 F$$

Поэтому мы получаем следующее выражение для конформного отображения:

$$w(z) = z\exp\Big(-\frac{1}{2}\,\partial_0^2 F - \partial_0 D(z)F\Big)$$

Мы видим, что F является производящей функцией конформных отображений в том смысле, что F как функция гармонических моментов содержит всю информацию о конформных отображениях областей. Коэффициенты разложения конформного отображения в ряд в окрестности ∞ выражаются через вторые производные F по t_k.

Пример: эллипс. Область, у которой все $t_k = 0$ при $k \geq 3$ является эллипсом. В этом случае имеется замкнутое выражение для функции F:

$$F = -\frac{3}{4}\,t_0^2 + \frac{1}{2}\,t_0^2 \log \frac{t_0}{1-4|t_2|^2} + \frac{t_0}{1-4|t_2|^2}\Big(|t_1|^2 + t_1^2\bar{t}_2 + \bar{t}_1^2 t_2\Big)$$

Связь с теорией интегрируемых систем дается следующей теоремой.

Теорема. *Функция F удовлетворяет системе уравнений*

$$(z-\zeta)e^{D(z)D(\zeta)F} = ze^{-\partial_0 D(z)F} - \zeta e^{-\partial_0 D(\zeta)F}$$

$$(\bar{z}-\bar{\zeta})e^{\bar{D}(\bar{z})\bar{D}(\bar{\zeta})F} = \bar{z}e^{-\partial_0 \bar{D}(\bar{z})F} - \bar{\zeta} e^{-\partial_0 \bar{D}(\bar{\zeta})F}$$

$$1 - e^{-D(z)\bar{D}(\bar{\zeta})F} = \frac{1}{z\bar{\zeta}}\,e^{\partial_0(\partial_0 + D(z) + \bar{D}(\zeta))F}$$

Доказательство. Доказательство состоит в выделении голоморфных и антиголоморфных по z и ζ частей в равенстве

$$\log\left|\frac{w(z)-w(\zeta)}{1-w(z)\overline{w(\zeta)}}\right| = \log\left|z^{-1} - \zeta^{-1}\right| + \frac{1}{2}\,\nabla(z)\nabla(\zeta)F$$

где $w(z)$ выражено через F согласно приведенной выше формуле. ■

Связь с теорией интегрируемых систем проявляется в том, что уравнения на функцию F совпадают с уравнениями двумеризованной цепочки Тоды в пределе нулевой дисперсии. Функцию F можно разложить в (формальный) ряд Тейлора по переменным $t_1, t_2, t_3, \ldots$. Коэффициенты этого ряда могут быть найдены из некоторых (достаточно сложных) рекуррентных соотношений комбинаторного характера, что позволяет говорить об эффективизации теоремы Римана.

28 Уравнение Левнера

Гипотеза Бибербаха (доказанная в 1986 году де Бранжем) заключается в том, что коэффициенты ряда Тейлора голоморфной однолистной в единичном круге функции f вида

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

удовлетворяют неравенствам $|a_n| \leq n$. Пример голоморфной однолистной в единичном круге функции, для которой $a_n = n$ дает функция Кебе $K(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$, которая конформно отображает единичный круг на плоскость с вырезанным лучом $[-\infty, -\frac{1}{4}]$.

Основным техническим инструментом в доказательстве гипотезы Бибербаха стало дифференциальное уравнение Левнера (1923 г.). В начале 2000 годов уравнение Левнера стало чрезвычайно популярным в теоретической физике (в теории критических явлений в двумерных системах) в связи с созданием нового подхода, названном SLE (стохастическая эволюция Левнера или эволюция Шрамма-Левнера).

Мы познакомимся с простейшим вариантом уравнения Левнера для полуплоскости, названном хордовым уравнением Левнера.

Рассмотрим верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}$, из которой вырезана некоторая гладкая кривая $\gamma = AB$, начинающаяся в точке $A \in \mathbb{R}$ и оканчивающаяся в точке $B \in \mathbb{H}$. Обозначим $\mathsf{D} = \mathbb{H} \setminus \gamma$ и рассмотрим конформное отображение $f : \mathsf{D} \to \mathbb{H}$, нормированное так, что его разложение при $z \to \infty$ имеет вид

$$f(z) = z + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

Коэффициент $c_1 \in \mathbb{R}$ называется емкостью. Известно, что $c_1 > 0$ и возрастает с увеличением длины кривой γ. Обозначим $c_1 = 2t$. Если форма кривой задана, а точка B скользит по кривой, конформное отображение будет зависеть от t. Иными словами, мы выбираем t в качестве параметра на кривой. Наша задача – вывести дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция f_t, осуществляющая конформное отображение $f_t : \mathsf{D}(t) \to \mathbb{H}$. Здесь $\mathsf{D}(t) = \mathbb{H} \setminus \gamma(t)$.

Пусть ℓ_h - прямолинейный отрезок вдоль мнимой оси от точки $z_0 \in \mathbb{R}$ до точки $z_0 + ih$. Вспомогательное конформное отображение $\mathbb{H} \setminus \ell_h \to \mathbb{H}$ имеет вид

$$w_h(z) = z_0 + \sqrt{(z - z_0)^2 + h^2}$$

При малых h

$$w_h(z) = z + \frac{h^2}{2(z - z_0)} + O(h^4)$$

При $\delta t \to 0$ образ $f_t(\mathsf{D}(t + \delta t))$ представляет собой верхнюю полуплоскость, из которой вырезан малый прямолинейный отрезок длины $h \to 0$, растущий из точки $f_t(B) := \xi_t$ и ортогональный вещественной оси. Мы имеем $f_{t+\delta t} = w_h \circ f_t$, где h можно найти, разложив обе части при $z \to \infty$:

$$z + \frac{2t + 2\delta t}{z} + \dots = f_t(z) + \frac{\frac{1}{2}h^2}{f_t(z) - \xi_t} + \dots = z + \frac{2t + \frac{1}{2}h^2}{z} + \dots$$

откуда $h^2 = 4\delta t$, и тогда

$$f_{t+\delta t}(z) = f_t(z) + \frac{2\delta t}{f_t(z) - \xi_t} + O((\delta t)^2)$$

Отсюда получаем хордовое уравнение Левнера:

$$\frac{df_t(z)}{dt} = \frac{2}{f_t(z) - \xi_t}$$

Начальное условие: $f_0(z) = z$. Функция ξ_t называется управляющей функцией. В ней закодирована информация о форме кривой.

Самим Левнером было получено несколько другое уравнение, которое сейчас называется радиальным. Вместо верхней полуплоскости рассмотрим единичный круг U, из которой вырезана кривая $\gamma = AB$, начинающаяся в точке $A \in \partial U$ и оканчивающаяся в точке $B \in U$. Обозначим $\mathsf{D} = U \setminus \gamma$ и рассмотрим конформное отображение $g : \mathsf{D} \to U$, нормированное так, что его разложение при $z \to 0$ имеет вид

$$g_t(z) = e^{-t} z + c_1 z^2 + \dots$$

Положение конца кривой параметризуется величиной t. Радиальное уравнение Левнера

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = g_t \frac{e^{i\xi_t} + g_t}{e^{i\xi_t} - g_t}$$

можно вывести из соображений, аналогичным приведенным выше. Начальное условие: $g_0(z) = z$.