**Римановы поверхности и интегрируемые системы.**

**С.М. Натанзон**

**2016 год**

Contents



## 1. Голоморфные атласы.

*Поверхностью* мы будем называть двумерное связное компактное ориентируемое двумерное топологическое многообразие без границы. Примером поверхности является сфера с конечным числом дыр, у которой граничный контур каждой дыры склеен с граничным контуром тора с дырой. Число вклеенных торов ("ручек") называется *родом* поверхности. Поверхности такого типа гомеоморфны, если и только если они имеют одинаковый род. Более того, можно доказать, что любая поверхность гомеоморфна поверхности, построенной таким способом и, следовательно, с точностью до гомеоморфизмов полностью определяется своим родом.

Риманова поверхность — это поверхность $P$ с дополнительной структурой, наделяющей точки поверхности некоторыми свойствами комплексных чисел. Эти свойства описываются с помощью *локальных карт*, то есть пар $(U, z)$, где $U \subset P$ — открытое подмножество и $z : U \to \mathbb{C}$ — непрерывное вложение в плоскость комплексных чисел. Семейством локальных карт $\{(U_\alpha, z_\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$ называется *голоморфным атласом*, если $P = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$ и отображения $z_\beta z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta) \to \mathbb{C}$ голоморфны для всех $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. Голоморфные атласы $\{(U_\alpha, z_\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$ и $\{(V_\beta, w_\beta) | \beta \in \mathcal{B}\}$ поверхности $P$ считаются *эквивалентными*, если их объединение тоже голоморфный атлас поверхности $P$ (то есть отображения $w_\beta z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \bigcap V_\beta) \to \mathbb{C}$ голоморфны для всех $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$).

*Римановой поверхностью* называется поверхность вместе с классом эквивалентности голоморфных атласов.

**Пример 1.1.** *Сфера Римана* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\infty$ *с атласом из двух локальных карт* $\{(U_1, z_1)(U_2, z_2)\}$, *где* $U_1 = \{z \in \mathbb{C}||z| < 2\}$, $z_1(z) = z\}$ *и* $U_2 = \{z \in \mathbb{C}||z| > \frac{1}{2}\}$, $z_2(z) = \frac{1}{z}\}$.

**Пример 1.2.** *Комплексный тор* $T = \mathbb{C}/\Gamma$, *где* $\Gamma$ *— группа параллельных переносов, порожденная сдвигами* $z \mapsto z + 1$ *и* $z \mapsto z + \tau$ *и* $\mathfrak{Im}(\tau) > 0$.

**Пример 1.3.** *Поверхность* $P = \{(x, y) \in \overline{\mathbb{C}^2}|y^2 = f(x, y)\}$, *где* $f(x, y) = x^{2m+1} + a_{2m}x^{2m} + ... + a_1x + a_0)$. *Голоморфный атлас состоит из карт* $(U_v, z_v)$, *где* $U_v$ *маленькая окрестность точки* $v = (x, y)$, $z_v(x, y) = x$ *при* $f(x) \neq 0$, $x \in \infty$, $z_v(x, y) = y$ *при* $f(x) = 0$ *и* $z_v(x, y) = \frac{1}{y}$ *при* $x = \infty$. *Такие поверхности называются гиперэллиптическими.*

## 2. Голоморфные отображения. Формула Римана-Гурвица.

Пусть $P$ и $Q$ — римановы поверхности, заданные голоморфными атласами $\{(U_\alpha, z_\alpha)|\alpha \in \mathcal{A}\}$ и $\{(V_\beta, w_\beta)|\beta \in \mathcal{B}\}$ соответственно. *Голоморфным отображением* римановой поверхности $P$ на римановой поверхность $Q$ называется отображение $f : P \to Q$, описываемое голоморфными не постоянными функциями во всех локальных картах. То есть $w_\beta f z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \bigcap f^{-1}(V_\beta)) \to \mathbb{C}$ голоморфно и не тождественно для всех $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$ таких что $U_\alpha \bigcap f^{-1}(V_\beta) \neq \emptyset$.

**Задача 2.1.** *Доказать, что это определение не зависит от выбора голоморфных атласов, описывающих римановы поверхности* $P$ *и* $Q$. *Доказать, что* $f(P) = Q$. *Доказать, что число прообразов* $f^{-1}(p)$ *конечно для любой точки* $p \in P$.

Свойства голоморфного отображения $f : P \to Q$ в окрестности точки $p \in P$ описываются функцией $f_{\alpha\beta} = w_\beta f z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \bigcap f^{-1}(V_\beta)) \to \mathbb{C}$, где $(U_\alpha, z_\alpha)$ и $(V_\beta, w_\beta)$ — локальные карты, содержащие точки $p$ и $f(p) \in Q$ соответственно. Как и всякая голоморфная функция, она представляется в виде ряда $f_{\alpha\beta} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$, где $a_n \neq 0$. Число $n$ называется *степенью ветвления отображения* $f$ *в точке* $p$ и обозначается $\deg_p f$.

**Задача 2.2.** *Доказать, что степень ветвления голоморфного отображения* $f$ *в точке* $p$ *не зависит от выбора локальных карт* $(U_\alpha, z_\alpha)$ *и* $(V_\beta, w_\beta)$. *Более того, локальные карты можно выбрать таким образом, чтобы* $f_{\alpha\beta}(z_\alpha) = z^n$.

Точка $p \in P$ называется *критической точкой* или *точкой ветвления* голоморфного отображения $f$, если $\deg_p f > 1$, то есть $f'_{\alpha\beta}(z_\alpha(p)) = 0$.

Точка $q \in Q$ называется *критическим значением* голоморфного отображения $f$, если прообраз $f^{-1}(q)$ имеет хотя бы одну критическую точку.

**Задача 2.3.** *Докажите, что число критических точек голоморфного отображения римановых поверхностей* $f : P \to Q$ *конечно. Пусть* $V \subset Q$ *— открытая область, замыкание которой связно, односвязно и не содержит критических значений* $f$. *Докажите, что прообраз* $f^{-1}(V)$ *распадается на конечное число компонент связности, на любой из которых отображение* $f$ *— гомеоморфизм.*

**Лемма-определение 2.1.** *Пусть $f : P \to Q$ — голоморфное отображение римановых поверхностей. Тогда число прообразов $|f^{-1}(q)|$ одинаково для всех некритических значений $q \in Q$. Это число называется степенью $\deg f$ отображения $f$.*

*Proof.* Рассмотрим не критические значения $q_1, q_2 \in Q$ и содержащую их связную односвязную открытую область $V$, замыкание которой не содержит критических значений $f$. Тогда, согласно задаче 2.3, в каждой компоненте связности прообраза $f^{-1}(V)$ лежит ровно один прообраз из $f^{-1}(q_i)$. Следовательно, число прообразов $|f^{-1}(q_i)|$ совпадает с числом компонент связности прообраза $f^{-1}(V)$. □

**Задача 2.4.** *Рассмотрим голоморфное отображение компактных римановых поверхностей $f : P \to Q$. Доказать, что $\deg f = \sum\limits_{p \in f^{-1}(q)} \deg_p f$ для любой точки $q \in Q$.*

**Теорема 2.1.** *(Формула Римана-Гурвица) Пусть $f : P \to Q$ — голоморфное отображение римановой поверхности $P$ рода $\tilde{g}$ на риманову поверхность $Q$ рода $g$. Тогда $\tilde{g} = (\deg f)(g-1) + \frac{1}{2}\sum\limits_{p \in P}(\deg_p f - 1) + 1$.*

*Proof.* Триангулируем поверхность $Q$ так, чтобы вершины триангуляции включали все критические значения. Пусть эта триангуляция состоит из $F$ граней, $E$ ребер и $V$ вершин. Прообраз этой триангуляции образует триангуляцию поверхности $P$. Она состоит из $(\deg f)F$ треугольников, $(\deg f)E$ ребер. Число вершин триангуляции равно $(\deg f)V - \sum\limits_{p \in P}(\deg_p f) - 1)$, поскольку каждый треугольник с вершиной $q \in Q$ порождает ровно $\deg_p f$ треугольников с вершиной в $p \in f^{-1}(q)$. Подсчет эйлеровых характеристик дает $2 - 2g = F - E + V$ и $2 - 2\tilde{g} = (\deg f)F - (\deg f)E + (\deg f)V - \sum\limits_{p \in P}(\deg_p f - 1)$, откуда $\deg f(2-2g) - (2-2\tilde{g}) = \sum\limits_{p \in P}(\deg_p f - 1)$. □

## 3. Мероморфные функции и дифференциалы.

Пусть $P$ — риманова поверхность, заданная голоморфным атласом локальных карт $\{(U_\alpha, z_\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$. Голоморфное отображение $f : P \to \overline{\mathbb{C}}$ на сферу Римана $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ называется *мероморфной функцией*.

Это означает, что в окрестности точки $p \in U_\alpha$ она имеет вид $f|_{U_\alpha}(p) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i (z_\alpha(p))^i$, где $a_k \neq 0$. Точка $p$ называется *нулем порядка* $k$ (при $k > 0$) или *полюсом порядка* $-k$ (при $k < 0$) функции $f$. Всякая мероморфная функция имеет полюс и ноль. Полюс порядка 1 называется *простым*.

**Задача 3.1.** *Доказать, что проекции $(x, y) \mapsto x$ и $(x, y) \mapsto y$ являются мероморфными функциями на гиперэллиптической римановой поверхности $P_F$. Найти полюса этих функций и их порядки.*

**Задача 3.2.** *Докажите, что множество мероморфных функций на римановой поверхности $P$ образует поле $\mathcal{M}(P)$*

*Мероморфный дифференциал* на римановой поверхности $P$ определяется семейством мероморфных функций $\{f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C} | \alpha \in \mathcal{A}\}$ на локальных картах $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ таким, что $\frac{f_\alpha}{f_\beta} = (z_\beta z_\alpha^{-1})'_{z_\alpha}$ на $U_\alpha \bigcap U_\beta$. Отвечающий этому семейству функций мероморфный дифференциал удобно записывать в виде $f_\alpha dz_\alpha$. Мероморфные дифференциалы образуют векторное пространство над полем комплексных чисел.

**Задача 3.3.** *Доказать, что множество мероморфных дифференциалов зависит лишь от римановой поверхности. Другими словами, для эквивалентного голоморфного атласа локальных карт $\{(V_\beta, w_\beta) | \beta \in \mathcal{B}\}$ существует однозначно определенный голоморфный дифференциал $h_\alpha dw_\alpha$ такой что $\frac{f_\alpha}{h_\beta} = (w_\beta z_\alpha^{-1})'_{z_\alpha}$ на $U_\alpha \bigcap V_\beta$.*

Если $f_\alpha(p) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i (z_\alpha(p))^i$, $a_k \neq 0$ и $k \neq 0$, то точка $p$ называется *нулем порядка* $k$ (при $k > 0$) или *полюсом порядка* $-k$ (при $k < 0$) дифференциала $\omega$. Множество нулей и полюсов мероморфного дифференциала и их порядки не меняются при замене голоморфного атласа локальных карт на эквивалентный. Мероморфный дифференциал без полюсов называется *голоморфным дифференциалом.*

**Теорема 3.1.** *Пусть $P$ — произвольная Риманова поверхность рода $g$. Тогда: 1) на $P$ существует не менее $g$ линейно независимых голоморфных дифференциалов; 2) для любой точки $p \in P$ и целого $j > 1$ существует мероморфный дифференциал с единственным полюсом в точке $p$, имеющим в некоторой локальной карте вид $(\frac{1}{z^j} + \sum\limits_{s=0}^{\infty} a_s z^s)dz$; 3) для любой пары точек $p_1 \neq p_2 \in P$ существует мероморфный дифференциал, имеющий в точках $p_1$ и $p_2$ полюса первого порядка и не имеющий других полюсов.*

Эта замечательная, трудная и очень важная теорема явилась одним из главных достижений математики конца 19 века. В ее доказательстве приняли участие Риман, Вейерштрасс, Пуанкаре, Клейн, Гильберт, Г.Вейль, П.Кебе. Мы не будем доказывать ее в этом курсе, но будем активно использовать.

**Задача 3.4.** *Доказать, что формула $\omega = \frac{g(x)dx}{y}$ при любом многочлене $g(x)$ описывает мероморфный дифференциал на гиперэллиптической римановой поверхности. Найти полюса этого дифференциала и их порядки. Проиллюстрировать последнюю теорему на примере гиперэллиптических римановых поверхностей.*

## 4. Периоды голоморфных дифференциалов.

Согласно нашим определениям мероморфный дифференциал $\omega$ в каждой локальной карте $z : U \to \mathbb{C} = \{(x + iy)\}$ представляется в виде $\omega = f(z)dz = S(x,y)dx + T(x,y)dy$, где $dz = dx + idy$ и $S$, $T$ — комплекснозначные функции.

**Задача 4.1.** *Доказать, что $\omega = S(x,y)dx + T(x,y)dy$ — это замкнутая дифференциальная 1-форма (т.е $d\omega = 0$). В частности, для любого ориентированного отрезка $l \subset P$ определен интеграл $\int\limits_l \omega$, не меняющийся при постоянных на концах гомотопиях отрезка $l$.*

**Задача 4.2.** *Пусть $\omega'$ — другой мероморфный дифференциал. Доказать, что $\omega \wedge \omega' = 0$.*

*Каноническим базисом циклов* на поверхности $P$ рода $g$ мы будем называть систему простых замкнутых ориентированных контуров $\{a_i, b_i | i = 1, ..., g\}$, которые пересекаются в одой точке, не имеют других попарных точек пересечения и индексы пересечения равны $(a_i, a_j) = (b_i, b_j) = 0$, $(a_i, b_j) = \delta_{ij}$.

**Теорема 4.1.** *Пусть $\omega$, $\omega'$ — замкнутые дифференциальные 1-формы, гладкие на поверхности $P$. Рассмотрим канонический базис циклов $\mathfrak{B} = \{a_i, b_i | i = 1, ..., g\} \subset P$. Положим $A_i = \oint\limits_{a_i} \omega$, $B_i = \oint\limits_{b_i} \omega$, $A'_i = \oint\limits_{a_i} \omega'$, $B'_i = \oint\limits_{b_i} \omega'$. Тогда $\iint\limits_P \omega \wedge \omega' = \sum\limits_{i=1}^{g} (A_i B'_i - A'_i B_i)$.*

*Proof.* Разрезая поверхность $P$ по циклам $\mathfrak{B}$, получаем $4g$- угольник $\Gamma$ со сторонами $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, ..., a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$. Фиксируем точку $p_0 \in P$ и рассмотрим интегралы $f(p) = \int\limits_{[p_0, p]} \omega$ по путям внутри $\Gamma$ с началом в $p_0$ и концом в $p$. Тогда $d(f\omega') = df \wedge \omega' = \omega \wedge \omega'$ и согласно формуле Стокса

$$\iint\limits_P \omega \wedge \omega' = \oint\limits_{\partial\Gamma} f\omega' = \sum_{i=1}^{g} (\oint\limits_{a_i} f\omega' + \oint\limits_{a_i^{-1}} f\omega') + \sum_{i=1}^{g} (\oint\limits_{b_i} f\omega' + \oint\limits_{b_i^{-1}} f\omega').$$

С другой стороны, для точек $p_i \in a_i$, $\tilde{p}_i \in a_i^{-1}$, отвечающих одной и той же точке $p \in P$ мы имеем $f(\tilde{p}_i) - f(p_i) = \oint\limits_{b_i} \omega = B_i$. Таким образом,

$$\oint\limits_{a_i} f(p_i)\omega'(p_i) + \oint\limits_{a_i^{-1}} f(\tilde{p}_i)\omega'(\tilde{p}_i) = \oint\limits_{a_i} f(p_i)\omega'(p_i) - \oint\limits_{a_i} (f(p_i) + B_i)\omega'(p_i) = -B_i \oint\limits_{a_i} \omega'(p_i) = -B_i A'_i.$$

Аналогично $\oint\limits_{b_i} f(p_i)\omega'(p_i) + \oint\limits_{b_i^{-1}} f(\tilde{p}_i)\omega'(\tilde{p}_i) = A_i B'_i$. Таким образом, $\iint\limits_P \omega \wedge \omega' = \sum\limits_{i=1}^{g} (A_i B'_i - A'_i B_i)$. □

**Следствие 4.1.** *Пусть $\omega$ и $\omega'$ — голоморфные дифференциалы и $A_i = \oint\limits_{a_i} \omega$, $B_i = \oint\limits_{b_i} \omega$, $A'_i = \oint\limits_{a_i} \omega'$, $B'_i = \oint\limits_{b_i} \omega'$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{g} (A_i B'_i - A'_i B_i) = 0$. Если, кроме того, $\omega \neq 0$, то $\mathfrak{Im}(\sum\limits_{i=1}^{g} (A_i \overline{B}_i)) < 0$. В частности, $\omega = 0$, если $A_i = 0$ для всех $i$ или $A_i, B_i \in \mathbb{R}$.*

*Proof.* Первое утверждение следует из $\omega \wedge \omega' = 0$ Комплексно сопряженный к $\omega = f(z)dz$ дифференциал $\bar{\omega} = \bar{f}(\bar{z})d\bar{z}$ тоже замкнут, причем $\bar{A}_i = \oint\limits_{a_i} \bar{\omega}$, $\bar{B}_i = \oint\limits_{b_i} \bar{\omega}$. Поэтому $\mathfrak{Im}(\sum\limits_{i=1}^{g} (A_i \overline{B}_i)) = -\frac{i}{2} \sum\limits_{i=1}^{g} (A_i \bar{B}_i - \bar{A}_i B_i) = -\frac{i}{2} \iint\limits_P \omega \wedge \bar{\omega} = -\iint\limits_P |f|^2 dx \wedge dy < 0$. □

**Задача 4.3.** *Доказать, что размерность пространства голоморфных дифференциалов на римановой поверхности рода $g$ равна $g$. Более того, для любого канонического базиса циклов существует единственный базис голоморфных дифференциалов $\{\omega_1, ..., \omega_g\}$ такой что $\int\limits_{a_i} \omega_j = 2\pi \boldsymbol{i} \delta_{ij}$.*

*Периодом мероморфного дифференциала* называется его интеграл по замкнутому контуру. Рассмотрим базис голоморфных дифференциалов $\{\omega_1, ..., \omega_g\}$ о котором идет речь в предыдущей задаче. Возникающая при этом матрица $B_{ij} = \int\limits_{b_i} \omega_j$ называется *матрицей периодов голоморфных дифференциалов* на поверхности $P$, отвечающей каноническому базису циклов $\{a_i, b_i | i = 1, ..., g\}$.

**Теорема 4.2.** *Матрица периодов голоморфных дифференциалов отвечающей каноническому базису циклов $\{a_i, b_i | i = 1, ..., g\}$ симметрична и ее вещественная часть отрицательно определена.*

*Proof.* Положим $\omega = \omega_k$, $\omega' = \omega_j$ и определим $A_i$, $B_i$,$A_i'$,$B_i'$ как в теореме 4.1. Тогда, согласно следствию 4.1

$$0 = \sum_{i=1}^{g} (A_i B_i' - A_i' B_i) = \sum_{i=1}^{g} (2\pi \mathtt{i} \delta_{ik} B_{ij} - 2\pi \mathtt{i} \delta_{ij} B_{ik}) = 2\pi \mathtt{i} (B_{kj} - B_{jk}).$$

Таким образом, $B_{kj} = B_{jk}$.

Рассмотрим линейную комбинацию с вещественными коэффициентами $\omega = \sum\limits_{k=1}^{g} x_k \omega_k$ и положим $A_i = \oint\limits_{a_i} \omega$, $B_i = \oint\limits_{b_i} \omega$. Тогда $A_i = 2\pi \mathtt{i} x_i$, $B_i = \sum\limits_{k=1}^{g} x_k B_{ik}$ и, согласно следствию 4.1,

$$0 > \mathfrak{Im}(\sum_{i=1}^{g} (A_i \overline{B}_i)) = \mathfrak{Im}(\sum_{k=1}^{g} 2\pi \mathtt{i} x_i \sum_{k=1}^{g} x_k B_{ik}) = 2\pi \sum_{i,k} (\mathfrak{Re} B_{ij}) x_i x_k.$$

□

## 5. Билинейные соотношения Римана.

Согласно нашим определениям в каждой локальной карте $z : U \to \mathbb{C}$, где $z(p) = 0$ мероморфный дифференциал представляется в виде

$$\omega = f(z) dz = (c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + ...) dz,$$

где $k$ — произвольное целое число. Рассмотрим маленький контур $c$ вокруг точки $p$, такой что контур $z(c)$ ориентирован против часовой стрелки. Число

$$\mathtt{Res}_p \omega = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c} \omega = c_{-1}$$

называется *вычетом дифференциала $\omega$ в точке $p$*.

**Задача 5.1.** *Доказать, что мероморфный дифференциал на компактной поверхности имеет лишь конечное число полюсов, причем сумма вычетов по всем полюсам равна 0. В частности, если полюс единственный, то его степень больше 1.*

**Теорема 5.1.** *Пусть $\omega$ — голоморфный, а $\omega'$ — мероморфный дифференциалы на римановой поверхности $P$ и $\mathfrak{B} = \{a_i, b_i | i = 1, ..., g\} \subset P$ — канонический базис циклов. Положим*

$$A_i = \oint\limits_{a_i} \omega, \quad B_i = \oint\limits_{b_i} \omega, \quad A_i' = \oint\limits_{a_i} \omega', \quad B_i' = \oint\limits_{b_i} \omega'.$$

*Пусть дифференциал $\omega'$ имеет единственный полюс и*

$$\omega' = (\frac{1}{z^n} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i)dz$$

*в некоторой локальной карте $z : U \to \mathbb{C}$. Рассмотрим представление*

$$\omega = (\sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j)dz$$

*дифференциала $\omega$ в этой локальной карте. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{g}(A_i B_i' - A_i' B_i) = 2\pi i \frac{c_{n-2}}{n-1}.$$

*Proof.* Окружим полюс дифференциала $\omega'$ маленьким контуром $\gamma$. Разрезая поверхность $P \setminus \gamma$ по циклам $\mathfrak{B}$, получаем $4g$- угольник $\Gamma$ со сторонами $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, ..., a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$ с дыркой $\gamma$. Фиксируем точку $p_0 \in \Gamma$ и рассмотрим интегралы $f(p) = \int\limits_{[p_0,p]} \omega$ по путям внутри $\Gamma$ с началом в $p_0$ и концом в $p$. Тогда $d(f\omega') = df \wedge \omega' = \omega \wedge \omega'$ и согласно формуле Стокса

$$0 = \iint\limits_{P} \omega \wedge \omega' = \oint\limits_{\partial\Gamma} f\omega' = \sum_{i=1}^{g}(\oint\limits_{a_i} f\omega' + \oint\limits_{a_i^{-1}} f\omega') + \sum_{i=1}^{g}(\oint\limits_{b_i} f\omega' + \oint\limits_{b_i^{-1}} f\omega') - \oint\limits_{\gamma} f\omega'.$$

Первые 2 слагаемых находятся так же, как при доказательстве теореме 4.1. Они равны соответственно $-\sum\limits_{i=1}^{g} B_i A_i'$ и $\sum\limits_{i=1}^{g} A_i B_i'$. Последний интеграл является вычетом голоморфного дифференциала $f\omega'$ и, следовательно, равен $2\pi i \frac{c_{n-2}}{n-1}$. $\square$

**Теорема 5.2.** *Пусть $\omega$ — голоморфный, а $\omega'$ — мероморфный дифференциал на римановой поверхности $P$ рода $g$ и $\mathfrak{B} = \{a_i, b_i | i = 1, ..., g\} \subset P$ — канонический базис циклов. Положим*

$$A_i = \oint\limits_{a_i} \omega, \quad B_i = \oint\limits_{b_i} \omega, \quad A_i' = \oint\limits_{a_i} \omega', \quad B_i' = \oint\limits_{b_i} \omega'.$$

*Выберем точку $p_0 \in P - \mathfrak{B}$ и положим $f(p) = \int\limits_{l_p} \omega$, где $l_p \subset P - \mathfrak{B}$ — путь, с началом в $p_0$ и концом в $p$. Тогда, если $\omega'$ имеет лишь простые полюса $p_k$, то*

$$\sum_{i=1}^{g}(A_i B_i' - A_i' B_i) = 2\pi i \sum_{k} f(p_k)\mathtt{Res}_{p_k}(\omega').$$

*Proof.* Повторяя с очевидными модификациями начало доказательства предыдущей теоремы находим, что

$$0 = \sum_{i=1}^{g}(A_i B_i' - A_i' B_i) - \sum_{k} \oint\limits_{\gamma_k} f\omega',$$

где $\gamma_k$ — маленькие контуры окружающие $p_k$. С другой стороны $\oint\limits_{\gamma_k} f\omega' = 2\pi i f(p_k)\mathtt{Res}_{p_k}(\omega')$, поскольку полюса в точках $p_i$ простые. $\square$

Следствие 4.1 и теоремы 5.1, 5.2 называются *билинейными соотношения Римана..*

## 6. Дивизоры.

Конечная формальная линейная комбинация

$$D = \sum_{i=1}^{k} n_i p_i$$

точек римановой поверхности $p_i \in P$ с целыми коэффициентами $n_i \in \mathbb{Z}$ называется *дивизором* на $P$. Дивизоры образуют модуль над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

*Степень дивизора*

$$\deg D = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

образует линейный функционал на этом модуле. Дивизор называется *положительным* (обозначается $D > 0$), если все его коэффициенты $n_i$ положительны. Мы будем также писать $D_1 > D_2$, если $D_1 - D_2 > 0$. Равенство $D = 0$ будет означать $D = \emptyset$.

*Дивизором мероморфной функции или дифференциала* $h$ с множеством нулей $p_1, ..., p_s$ и множеством полюсов $q_1, ..., q_t$ называется дивизор

$$(h) = \sum_{i=1}^{s} n_i p_i - \sum_{i=1}^{t} m_i q_i,$$

где $n_i$ (соответственно $m_i$) кратность нуля (соответственно полюса) функции или дифференциала $h$ в точке $p_i$ (соответственно $q_i$).

Дивизор мероморфной функции называется *главным дивизором.* Дивизоры, отличающиеся на главный дивизор называются *линейно эквивалентными.*

**Задача 6.1.** *Доказать, что степени линейно эквивалентных дивизоров совпадают.*

Дивизоры линейно эквивалентные положительному называются *эффективными.*

Дивизоры мероморфных дифференциалов образуют класс линейной эквивалентности $\mathcal{K}$, называемый *каноническим.*

**Задача 6.2.** *Используя теорему Римана-Гурвица, докажите, что* $\deg(\mathcal{K}) = 2g - 2$.

Сопоставим дивизору $D$ векторные пространства $R(D) = \{f$ – мероморфная функция такая, что $(f) \geq D\}$ и $I(D) = \{\omega$ – мероморфный дифференциал такой, что $(\omega) \geq D\}$. Положим $r(D) = \mathtt{dim}\ R(D)$ и $i(D) = \mathtt{dim}\ I(D)$.

**Пример 6.1.** *Если* $D > 0$, *то* $R(D) = \emptyset$ *и* $r(D) = 0$. *Если* $D = \emptyset$, *то* $R(D)$ *— это постоянные функции,* $r(D) = 1$ *и* $i(D) = g$.

**Теорема 6.1.** *Для любого дивизора* $D$ *и мероморфной функции* $f$ *выполнено* $i(D) = r(D - \mathcal{K})$ *и* $i(D + (f)) = i(D)$, $r(D + (f)) = r(D)$.

*Proof.* Рассмотрим мероморфный дифференциал $\omega$. Тогда соответствие $\omega' \mapsto \frac{\omega'}{\omega}$ задает изоморфизм между $I(D)$ и $R(D-(\omega))$ откуда $i(D) = r(D-\mathcal{K})$. Соответствие $f' \mapsto f'f$ задает изоморфизм между $R(D)$ и $R(D+(f))$. Аналогично $i(D+(f)) = i(D)$. □

## 7. Теорема Римана-Роха.

*Теорема Римана-Роха утверждает, что* $r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$ *для всех дивизоров* $D$.

Запишем теорему Римана-Роха в симметричном виде.

**Лемма 7.1.** $r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$, *если и только если* $r(-D) + \frac{1}{2}\deg(-D) = r(D-\mathcal{K}) + \frac{1}{2}\deg((D-\mathcal{K})$.

*Proof.* Пусть $r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$. Тогда, согласно теореме 6.1 и задаче 6.2 находим, что $r(-D) + \frac{1}{2}\deg(-D) = \deg D + i(D) - g + 1 + \frac{1}{2}\deg(-D) = \frac{1}{2}\deg(D) + i(D) - \frac{1}{2}\deg(\mathcal{K}) = r(D-\mathcal{K}) + \frac{1}{2}\deg(D-\mathcal{K})$. Обратное утверждение доказывается аналогично. □

Мы уже знаем что теорема Римана-Роха верна для $D = \emptyset$, поскольку $r(\emptyset) = 1$ и $i(\emptyset) = g$. Докажем еще один частный случай теоремы Римана-Роха.

**Теорема 7.1.** *Если* $D > 0$, *то* $r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$.

*Proof.* Фиксируем на римановой поверхности канонический базис циклов $\{a_i, b_i | i = 1, ..., g\}$. Пусть $D = \sum\limits_{k=1}^{m} n_k p_k$, где $n_k > 0$. Согласно теореме 3.1 для каждой точки $p_k$ и $j > 1$ существует локальная карта $(U, z)$ и мероморфный дифференциал $\varphi_k^j$, имеющий в этой карте вид $\varphi_k^j = (\frac{1}{z^j} + \sum\limits_{s=0}^{\infty} a_s z^s)dz$, не имеющий других полюсов на всей поверхности. Ввиду задачи 4.3 можно считать, что $\oint\limits_{a_i} \varphi_k^j = 0$ для всех $i$. Положим $B_{kl}^j = \oint\limits_{b_l} \varphi_k^j$ (здесь $k$— номер точки, $l$— номер контура интегрирования, $j$— степень полюса дифференциала). Эти числа образуют матрицу

$$B = \left( \begin{array}{c} B_{11}^2 B_{11}^3 \ldots B_{11}^{n_1+1} B_{21}^2 \ldots B_{m1}^{n_m+1} \\ B_{12}^2 B_{12}^3 \ldots B_{12}^{n_1+1} B_{22}^2 \ldots B_{m2}^{n_m+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{1g}^2 B_{1g}^3 \ldots B_{1g}^{n_1+1} B_{2g}^2 \ldots B_{mg}^{n_m+1} \end{array} \right).$$

у которой строки отвечают контуру интегрирования, а столбцы — степени полюса дифференциала в каждой точке.

Нас будут интересовать решения $\{c_{-j}^k\}$ системы

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^k B_{kl}^j = 0 \quad (l = 1, ..., g).$$

‘

Как учит нас линейная алгебра, размерность пространства таких решений равна $\deg D - \rho$ решений, где $\deg D = \sum\limits_{k=1}^{m} n_k$ — число неизвестных, а $\rho$ — ранг матрицы $B$.

Докажем, что всякая функция из $R(-D)$ порождает решение системы. В выбранных нами локальных картах в окрестностях точек $p_k$ дифференциал функции $f \in R(-D)$ представляется в виде

$$df = \Big( \sum_{j=-n_k-1}^{\infty} c_j^k z^j \Big) dz = \Big( \sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^k z^{-j} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j^k z^j \Big) dz,$$

поскольку $c_{-1}^k = 0$. Дифференциал $\varphi = df - \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^k \varphi_k^j$ голоморфен на всей поверхности и $\oint\limits_{a_i} \varphi = 0$ для всех $i$. Таким образом, согласно следствию 4.1, $\varphi = 0$, то есть $df = \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^k \varphi_k^j$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^k B_{kl}^j = \oint_{b_l} (\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^k \varphi_k^j) = \oint_{b_l} df = 0 \quad \text{для} \quad l = 1, ..., g.$$

Функции отличающиеся на константу порождают одинаковые решения.

Верно и обратное утверждение. Каждому ненулевому набору $\{c_{-j}^k\}$ отвечает мероморфный дифференциал

$$\omega = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^k \varphi_k^j.$$

Все его периоды равны 0, если $\{c_{-j}^k\}$ — решение системы. Следовательно, $\omega = df$, где функция $f = \int\limits_{p_0}^{p} \omega \in R(-D)$ и определена с точностью до прибавления константы.

Таким образом, пространство $R(-D)$ порождается константами и решениями нашей системы. Следовательно $\mathtt{dim} R(-D) = \deg D - \rho + 1$ и $-\rho = r(-D) - \deg D - 1$.

Представим теперь матрицу $B$ с помощью голоморфных дифференциалов. Рассмотрим базис пространства голоморфных дифференциалов $\{\omega_1, ..., \omega_g\}$ такой что $\oint\limits_{a_i} \omega_l = \delta_{il}$. Рассмотрим представления дифференциалов

$$\omega_l = \Big( \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{lj}^k z^j \Big) dz$$

в выбранных ранее локальных картах в окрестностях точек $p_k$. Используем билинейное соотношение Римана (теорема 5.1) для пары дифференциалов $\omega_l$ и $\varphi_k^j$. Оно дает

$$2\pi i \frac{\alpha_{l(j-2)}^k}{j-1} = \sum_{i=1}^{g} (\delta_{il} B_{ki}^j - 0) = B_{kl}^j$$

Таким образом,

$$B = 2\pi i \begin{pmatrix} \alpha_{10}^1 \frac{\alpha_{11}^1}{2} \dots \frac{\alpha_{1n_1-1}^1}{n_1} \alpha_{10}^2 \dots \frac{\alpha_{1n_m-1}^m}{n_m} \\ \alpha_{20}^1 \frac{\alpha_{21}^1}{2} \dots \frac{\alpha_{2n_1-1}^1}{n_1} \alpha_{20}^2 \dots \frac{\alpha_{2n_m-1}^m}{n_m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{g0}^1 \frac{\alpha_{g1}^1}{2} \dots \frac{\alpha_{gn_1-1}^1}{n_1} \alpha_{g0}^2 \dots \frac{\alpha_{gn_m-1}^m}{n_m} \end{pmatrix}.$$

Строка этой матрицы состоит из коэффициентов разложения одного из дифференциалов $\omega_l$ во всех точках дивизора. Столбцу отвечают коэффициенты разложения всех дифференциалов $\omega_l$ при одинаковых степенях в одинаковых точках. Поэтому дифференциал $\sum_{l=1}^{m} d_l \omega_l$ принадлежит $I(D)$ если и только если линейная комбинация строк с коэффициентами $\{d_l\}$ равна 0. Размерность векторного пространства таких наборов $\{d_l\}$ равна $g - \rho$. Таким образом $i(D) = g - \rho = g + r(-D) - \deg D - 1$ □

Из этой теоремы и теоремы 6.1 следует

**Следствие 7.1.** $r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$, *если $D$ — эффективный дивизор.*

**Теорема 7.2.** $r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$ *для любого дивизора $D$.*

*Proof.* Если $r(-D) > 0$, то $(f) + D > 0$ для $f \in R(-D)$, Следовательно $D$ — эффективный дивизор и теорема Римана-Роха верна согласно следствию 7.1. Ввиду леммы 7.1 теорема верна и в случае $r(D - \mathcal{K}) > 0$.

Пусть теперь $r(-D) = 0$ и $r(D-\mathcal{K}) = 0$. Представим дивизор в виде $D = D_+ - D_-$, где $D_+, D_-$ положительны или пусты. Предположим, что $\deg D \geq g$. Тогда, как уже доказано, $r(-D_+) \geq \deg D_+ - g + 1 = \deg D + \deg D_- - g + 1 \geq 1 + \deg D_-$. Таким образом пространство $R(-D_+)$ содержит $1 + \deg D_-$ линейно независимых функций. Рассматривая их линейные комбинации можно найти функцию $f \in R(-D_+)$, с дивизором нулей $D_-$б то есть функцию $f \in R(-D)$. Это противоречит условию $r(-D) = 0$ и, следовательно $\deg D < g$. Виду леммы 7.1, отсюда следует $\deg(\mathcal{K} - D) < g$ и, частности, $\deg(D) > 2g - 2 - g = g - 2$.

Таким образом, $\deg(D) = g - 1$, что вместе с $r(-D) = 0$ и $i(D) = r(D - \mathcal{K}) = 0$, дает теорему Римана-Роха. □

## 8. Абелевы торы и $\theta$-функции.

Симметрическую $g \times g$ матрицу $B = \{B_{ij}\}$ с отрицательно определенной вещественной частью называется *римановой.*

**Лемма 8.1.** *Пусть $B = \{B_{ij}\}$ — риманова матрица. Тогда векторы*

$$2\pi \boldsymbol{i} e_k = 2\pi \boldsymbol{i} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_l = Be_l = \begin{pmatrix} B_{l1} \\ \dots \\ B_{lg} \end{pmatrix} \quad k, l = 1, \dots, g$$

*линейно независимы над $R$.*

*Proof.* Выделяя в равенстве $2\pi\mathtt{i}\sum\limits_{k=1}^{g}\lambda_k e_k + \sum\limits_{k=1}^{g}\mu_k f_k = 0$ $(\lambda_k,\mu_k\in\mathbb{R})$ вещественную часть, находим, что $\mathfrak{Re}B(\sum\limits_{k=1}^{g}\mu_k e_k) = 0$ откуда, в виду невырожденности $\mathfrak{Re}B$, $\sum\limits_{k=1}^{g}\mu_k e_k = 0$. Следовательно $\mu_1 = ... = \mu_g = 0$, а значит и $\lambda_1 = ... = \lambda_g = 0$. □

*θ-функцией, ассоциированной с римановой матрицей $B$* называется функция $\theta : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$, где

$$\theta(z) = \theta(z|B) = \sum_{N\in\mathbb{Z}^g}\exp\Big(\frac{1}{2} < BN, N > + < N, z >\Big)$$

и $z = (z_1, ..., z_g)$, $N = (N_1, ..., N_g)$, $< N, z >= \sum\limits_{i=1}^{g} N_i z_i$, $< BN, N >= \sum\limits_{i,j=1}^{g} B_{ij}N_iN_j$.

**Лемма 8.2.** *Ряд $\theta(z)$ абсолютно сходится на любом компакте пространства $\mathbb{C}^n$.*

*Proof.* Рассмотрим наибольшее собственное значение $-b < 0$ матрицы $\mathfrak{Re}B$. Тогда $\mathfrak{Re}(< BN, N >) \le -b < N, N >$ и следовательно

$$\Big|\exp\Big\{\frac{1}{2} < BN, N > + < N, z > \Big\}\Big| \le \exp\Big\{-\frac{b}{2}\sum_{i=1}^{g} N_i^2 + \sum_{i=1}^{g} N_i\tilde{z}_i\Big\} = \prod_{i=1}^{g}\exp\Big\{-\frac{b}{2}N_i^2 + N_i\tilde{z}_i\Big\},$$

где $\tilde{z} = \mathfrak{Re}(z)$.

Таким образом,

$$|\theta(z)| = \Big|\sum_{N\in\mathbb{Z}^g}\exp\Big\{\frac{1}{2} < BN, N > + < N, z > \Big\}\Big| \le \sum_{N\in\mathbb{Z}^g}\Big(\prod_{i=1}^{g}\exp\Big\{-\frac{b}{2}N_i^2 + N_i\tilde{z}_i\Big\}\Big) =$$

$$= \prod_{i=1}^{g}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{b}{2}n^2 + n\tilde{z}_i\Big\}\Big).$$

Следовательно

$$|\theta(z)| \le \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{b}{2}n^2 + cn\Big\}\Big)^g = \mathrm{const}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\Big\{-\frac{b}{2}(n-\frac{c}{b})^2\Big\}\Big)^g \quad \text{при} \quad |\tilde{z}_i| \le c.$$

Сходимость ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\{-\frac{b}{2}(n-\frac{c}{b})^2\}$$

следует из сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\frac{b}{2}(x-\frac{c}{b})^2\}dx,$$

которая эквивалентна сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-x^2\}dx.$$

Таким образом, ряд $\theta_B(z)$ равномерно сходится на $\{z\in\mathbb{C}^n | |\mathfrak{Re}(z_i)| \le c\}$ при любом $c$. □

**Лемма 8.3.** $\theta(z + 2\pi\boldsymbol{i}e_k) = \theta(z)$; $\quad \theta(z + f_k) = \exp(-\frac{1}{2}B_{kk} - z_k)\theta(z)$.

*Proof.* Первое равенство очевидно. Положим $N = M - e_k$. Тогда

$$\theta(z + f_k) = \sum_{N\in\mathbb{Z}^g} \exp(\frac{1}{2} < BN, N > + < N, z + f_k >) =$$

$$\sum_{N\in\mathbb{Z}^g} \exp(\frac{1}{2} < B(M - e_k), (M - e_k) > + < (M - e_k), z + f_k >) =$$

$$\sum_{M\in\mathbb{Z}^g} \exp(\frac{1}{2} < BM, M > - < M, Be_k > + \frac{1}{2} < Be_k, e_k > +$$

$$< M, z > + < M, f_k > - < e_k, z > - < e_k, f_k >) =$$

$$\exp(-\frac{1}{2}B_{kk} - z_k) \sum_{M\in\mathbb{Z}^g} \exp(\frac{1}{2} < BM, M > + < M, z >) = \exp(-\frac{1}{2}B_{kk} - z_k)\theta(z).$$

□

**Задача 8.1.** *Доказать, что*

$$\theta(z + 2\pi\boldsymbol{i}N + BM|B) = \exp(-\frac{1}{2} < BM, M > - < M, z >)\theta(z|B)$$

*для любых целых векторов* $N, M \in \mathbb{Z}^g$.

Нетрудно доказать, что голоморфных на $\mathbb{C}^g$ функций с $2g$ независимыми периодами не существует. Их роль в комплексном анализе играют максимально похожие на них квазипериодические $\theta$-функции.

Решетка

$$\Gamma = \{2\pi\mathrm{i}N + BM|N, M \in \mathbb{Z}^g\} \subset \mathbb{C}^g = \mathbb{R}^{2g}$$

называется *решеткой порожденной матрицей Римана* $B$. Ее ранг равен $2g$, согласно лемме 8.1. Фактор-пространство $T^{2g} = \mathbb{C}^g/\Gamma$ называется *абелевым тором.* Обозначим через $J_B : \mathbb{C}^g \to T^{2g}$ естественную проекцию. Для векторов $V_1, V_2 \in \mathbb{C}^g$ будем писать, также $V_1 \equiv V_2$, если $J_B(V_1) = J_B(V_2)$.

Можно доказать. что абелев тор является алгебраическим многообразием, то есть задается алгебраическими уравнениями в некотором проективном пространстве. Более того, можно доказать, что любой алгебраический тор описывается римановой матрицей. $\theta$-функции как раз и задают вложение тора $T^{2g}$ в виде алгебраического многообразия.

Разные римановы матрицы могут задавать одинаковые абелевы торы.

**Задача 8.2.** *Доказать, что римановы матрицы* $B$ *и* $B'$ *порождают одинаковые абелевы торы если и только если существует матрица вида* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *такая, что* $B' = 2\pi\boldsymbol{i}(aB + 2\pi\boldsymbol{i}b)(cB + 2\pi\boldsymbol{i}d)^{-1}$.

$\theta$-функции имеют естественные обобщения: *$\theta$-функции с характеристиками* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^g$

$$\theta[\alpha, \beta](z|B) = \sum_{N\in\mathbb{Z}^g} \exp(\frac{1}{2} < B(N + \alpha), N + \alpha > + < z + 2\pi\mathrm{i}\beta, N + \alpha >)\alpha, \beta \in \mathbb{R}^g.$$

Они также квазипериодичны и поэтому часто используются в приложениях:

**Задача 8.3.**
$$\theta[\alpha,\beta](z+2\pi \boldsymbol{i} N+BM|B)=$$
$$=\exp(-\frac{1}{2}<BM,M>-<z,M>+2\pi \boldsymbol{i}(<\alpha,N>-<\beta,M>))\theta[\alpha,\beta](z|B).$$

Их можно выразить через обычные $\theta$-функции:

**Задача 8.4.** *Доказать, что*
$$\theta[\alpha,\beta](z|B)=\exp(\frac{1}{2}<B\alpha,\alpha>+<\alpha,z+2\pi\boldsymbol{i}\beta>)\theta(z+B\alpha+2\pi\boldsymbol{i}\beta).$$

**Задача 8.5.** *Доказать, что преобразование римановой матрицы из задачи 8.2 порождает преобразование* $\theta[\alpha',\beta'](z'|B')=const\sqrt{M}\exp\{\frac{1}{2}\sum_{i\leq j}z_iz_j\frac{\partial\ln\det M}{\partial B_{ij}}\}\theta[\alpha,\beta](z|B)$, *где* $M=cB+2\pi\boldsymbol{i}d$, $z=\frac{1}{2\pi\boldsymbol{i}}z'M$ *и* $[\alpha',\beta']=[\alpha,\beta]\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}+diag[cd^t,ab^t]$

Особенно важны $\theta$-функций с характеристиками, координаты которых принимают значения 0 и $\frac{1}{2}$. Такие $\theta$-характеристики называются полупериодами. Они называются *четными* или *нечетными* в зависимости от четности числа $4<\alpha,\beta>$

**Задача 8.6.** *Доказать, что четность полупериода* $[\alpha,\beta]$ *совпадает с четностью соответствующей* $\theta$*-функции* $\theta[\alpha,\beta]$. *Найти число четных и нечетных полупериодов.*

$\theta$-функций порядка $n$ с характеристиками $[\alpha,\beta]$ называется голоморфная функция на $\mathbb{C}^g$, с условием квазипериодичности
$$\theta_n[\alpha,\beta](z+2\pi\mathtt{i}N+BM|B)=$$
$$=\exp(-\frac{n}{2}<BM,M>-n<z,M>+2\pi\mathtt{i}(<\alpha,N>-<\beta,M>))\theta_n[\alpha,\beta](z|B).$$

**Задача 8.7.** *Докажите, что* $\theta$*-функций порядка* $n$ *с характеристиками* $[\alpha,\beta]$ *порождают векторное пространств размерности* $n^g$. *Причем в качестве базиса этого пространства можно взять функции*
$$\theta[\frac{\alpha+\gamma}{n},\beta](nz|nB).$$

Мероморфные функции на абелевом торе называются *абелевыми функциями.* Абелевой функцией является например отношение двух $\theta$-функций одинакового порядка с одинаковыми $\theta$-характеристиками. Можно доказать, что так получаются все абелевы функции.

## 9. Теорема Абеля.

Рассмотрим риманову поверхность $P$ с каноническим базисом циклов $\{a_i,b_i|i=1,\dots,g\}$ и отвечающий ему базис пространства голоморфных дифференциалов $\{\omega_i\}$. Положим $B_{ik}=\oint_{b_k}\omega_i$.

**Лемма 9.1.** *Сопоставим дивизору* $D = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i - \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$ *дифференциал* $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i + \sum\limits_{j=1}^{g} n_j \omega_j$, *где* $\tilde{\omega}_i$ *— мероморфный дифференциал, голоморфный вне полюсов* $p_i, q_i$, *с вычетами 1, -1 в точках* $p_i$, $q_i$ *соответственно и такой, что* $\oint\limits_{a_j} \tilde{\omega}_i = 0$ *для всех* $j$. *Тогда*

$$\oint\limits_{b_k} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{q_i}^{p_i} \omega_k + \sum_{j=1}^{g} n_j B_{jk}.$$

*Proof.* Применив билинейное соотношение Римана

$$\sum_{j=1}^{g} (A_j B'_j - A'_j B_j) = 2\pi i \sum_{p} (\int\limits_{p_0}^{p} \omega) \mathtt{Res}_p(\omega').$$

к паре дифференциалов $(\omega_k, \tilde{\omega}_i)$ находим, что

$$2\pi i \oint\limits_{b_k} \tilde{\omega}_i = 2\pi i \int\limits_{q_i}^{p_i} \omega_k.$$

Таким образом

$$\oint\limits_{b_k} \omega = \sum_{i=1}^{n} \oint\limits_{b_k} \tilde{\omega}_i + \sum_{j=1}^{g} n_j B_{jk} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{q_i}^{p_i} \omega_k + \sum_{j=1}^{g} n_j B_{jk}.$$

□

Согласно теореме 4.2 матрица периодов $B = \{B_{ik}\}$ является римановой. Порожденный матрицей $B$ абелев тор называется *якобианом* $J(P)$ *римановой поверхности* $P$.

**Задача 9.1.** *Доказать, что якобиан* $J(P)$ *не зависит об выбора канонического базиса циклов на* $P$.

Можно доказать, что матрица периодов однозначно определяет риманову поверхность (теорема Торелли). При $g = 1, 2, 3$ любая риманова матрица является якобианом некоторой римановой поверхности. При $g > 3$ якобианы образуют $3g - 3$-мерное множество в $\frac{g(g+1)}{2}$-мерном (комплексном) пространстве всех римановых матриц. Важная для приложений проблема описания этого подмножества называется *проблемой Шоттки.*

Зафиксируем произвольную точку $p_0 \in P$. Рассмотрим отображение

$$A = A_{p_0} : p \mapsto (\int\limits_{p_0}^{p} \omega_1, ..., \int\limits_{p_0}^{p} \omega_g) \in \mathbb{C}^g$$

на рассеченной поверхности $P \setminus \{a_i, b_i\}$.

**Задача 9.2.** *Докажите, что отображение* $\tilde{A} = \tilde{A}_{p_0} = J_B A : P \to J(P)$ *продолжается на всю поверхность* $P$.

**Задача 9.3.** *Как меняется отображение* $\tilde{A}$ *при замене циклов* $\{a_i, b_i\}$.

Отображение $\tilde{A} : P \to J(P)$ называется *отображением Абеля*. Равенство $\tilde{A}(D) = \sum\limits_i n_i \tilde{A}(p_i) \in J(P)$ продолжает его на произвольный дивизор $D = \sum\limits_i n_i p_i$.

**Теорема 9.1.** *(теорема Абеля) Дивизор* $D = \sum\limits_{i=1}^n p_i - \sum\limits_{i=1}^n q_i, \quad p_i, q_i \in P$ *является главным, если и только если* $A(D) \equiv 0$.

*Proof.* Пусть $D = \sum\limits_{i=1}^n p_i - \sum\limits_{i=1}^n q_i$ — дивизор мероморфной функции $f$. Периоды мероморфного дифференциала $\omega = d \ln f$ кратны $2\pi\mathtt{i}$, то есть

$$\oint\limits_{a_k} \omega = 2\pi\mathtt{i} n_k \quad \text{и} \quad \oint\limits_{b_k} \omega = 2\pi\mathtt{i} m_k, \quad \text{где} \quad n_k, m_k \in \mathbb{Z}.$$

С другой стороны, дифференциал $\omega$ представляется в виде суммы

$$\omega = \sum_{i=1}^n \tilde{\omega}_i + \sum_{j=1}^g c_j \omega_j,$$

где $\tilde{\omega}_i$ — мероморфный дифференциал, голоморфный вне полюсов $p_i, q_i$, с вычетами 1, -1 в точках $p_i$, $q_i$ соответственно и такой, что $\oint\limits_{a_j} \tilde{\omega}_i = 0$ для всех $j$. В частности, $\oint\limits_{a_k} \omega = 2\pi\mathtt{i} c_k$ и $c_k = n_k$. Таким образом, согласно лемме 9.1

$$\oint\limits_{b_k} \omega = \sum_{i=1}^n \int\limits_{q_i}^{p_i} \omega_k + \sum_{j=1}^g n_j B_{jk}.$$

Следовательно, координата $k$ образа $A(D)$ — это

$$(A(\sum_{i=1}^n (p_i)) - A(\sum_{i=1}^n (q_i)))_k = \sum_{i=1}^n \int\limits_{q_i}^{p_i} \omega_k = \pi\mathtt{i} m_k - \sum_{j=1}^g n_j B_{jk}.$$

Таким образом, $A(D)$ принадлежит решетке квазипериодов и $A(D) \equiv 0$.

Пусть теперь $A(D) \equiv 0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_{q_i}^{p_i} \omega_k = 2\pi\mathtt{i} m_k - \sum_{j=1}^g n_j B_{jk}.$$

для некоторых целых чисел $n_k, m_k$. Рассмотрим дифференциал

$$\omega = \sum_{i=1}^n \tilde{\omega}_i + \sum_{j=1}^g n_j \omega_j.$$

Согласно лемме 9.1,

$$\oint\limits_{b_k} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{q_i}^{p_i} \omega_k + \sum_{j=1}^{g} n_j B_{jk} = 2\pi \mathtt{i} m_k.$$

Поэтому функция $\exp(\int\limits_{p_0}^{p} \omega)$ корректно определена на $P$. Более того, ее дивизор равен $D$. $\square$

## 10. Задача обращения Якоби.

Задача обращения Якоби состоит в описании положительного дивизора $D = \sum\limits_{i=1}^{g} p_i \in S^g P$, переходящего при отображении Якоби $A_{p_0}$ в предписанную точку якобиана $\tilde{\xi} \in J(P)$.

Для решения задачи обращения Якоби нам понадобится функция

$$F(p) = F_e(p) = \theta(A(p) - e).$$

В этой формуле $\theta(z) = \theta(z|B)$ — $\theta$-функция поверхности $P$, отвечающая базису $\{a_i, b_i\}$, $e \in \mathbb{C}^g$ и $A(p) = A_{p_0}(p) = \begin{pmatrix} \int\limits_{p_0}^{p} \omega_1 \\ \ldots \\ \int\limits_{p_0}^{p} \omega_g \end{pmatrix}$, где интегралы берутся по путям, не пересекающим циклы $\{a_i, b_i\}$.

**Задача 10.1.** *Доказать, что дивизор нулей функции $F_e$ зависит лишь от классов гомологий циклов $\{a_i, b_i\}$.*

**Лемма 10.1.** *Множество нулей функции $F(p)$ или совпадает со всей поверхностью, или образует дивизор степени $g$.*

*Proof.* Разрезая поверхность $P$ по циклам $\{a_i, b_i\}$, получаем $4g$- угольник $\Gamma \subset$ со сторонами, которые мы будем обозначать, как соответствующие циклы $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, ..., a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$. Обозначим через $A^+$ и $A^-$ ограничение функции $\begin{pmatrix} \int\limits_{p_0}^{p} \omega_1 \\ \ldots \\ \int\limits_{p_0}^{p} \omega_g \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^g$ на множества $\{a_1, b_1, ..., a_g, b_g\}$ и $\{a_1^{-1}, b_1^{-1}, ..., a_g^{-1}, b_g^{-1}\}$ соответственно.

Положим

$$F^+ = F|_{\{a_1, b_1, ..., a_g, b_g\}} \quad \text{и} \quad F^- = F|_{\{a_1^{-1}, b_1^{-1}, ..., a_g^{-1}, b_g^{-1}\}}.$$

Точке $p \in b_k \subset P$ отвечают две точки границы. Их образы при отображении Абеля связаны соотношением $A_j^+(p) = A_j^-(p) + 2\pi \mathtt{i} \delta_{jk}$ и, следовательно

$$d \ln F^-(p) = d \ln F^+(p).$$

Образы точки $p \in a_k \subset P$ связаны соотношением $A_j^-(p) = A_j^+(p) + B_{jk}$ и, следовательно, $\ln F^-(p) = \ln(\theta(A^-(p) - e)) = \ln(\theta(A^+(p) - e + B_k)) =$
$\ln(\exp(-\frac{1}{2}B_{kk} - A_k^+(p) + e_k)\theta(A^+(p) - e))) = -\frac{1}{2}B_{kk} - A_k^+(p) + e_k + \ln F^+(p)$, откуда

$$d\ln F^-(p) = d\ln F^+(p) - \omega_k.$$

Таким образом, если $F$ — ненулевая функция, то число ее нулей равно

$$\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\oint\limits_{\partial\Gamma} d\ln F(p) = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{k=1}^{g}(\oint\limits_{a_k} + \oint\limits_{b_k})[d\ln F^+(p) - d\ln F^-(p)] = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{k=1}^{g}\oint\limits_{a_k}\omega_k = g.$$

□

Каноническому базису циклов $\{a_i, b_i\}$ отвечает *вектор римановых констант*

$$K = K_{p_0} = \begin{pmatrix} K_1 \\ ... \\ K_g \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^g,$$

где

$$K_j = \frac{2\pi\mathtt{i} + B_{jj}}{2} - \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{\substack{1 \le l \le g \\ l \ne j}}\oint\limits_{a_l}\omega_l(p)A_j^+(p).$$

**Теорема 10.1.** *(теорема Римана о нулях) Пусть $p_1, ..., p_g$ — множество всех нулей функции $F_e$. Тогда*

$$A(\sum_{i=1}^{g} p_i) \equiv e - K,$$

*где $K$ — вектор римановых констант.*

*Proof.* Интеграл

$$\xi_j = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\oint\limits_{\partial\tilde{\Gamma}}(A_j(p))d\ln F(p)$$

равен сумме вычетов подынтегрального выражения, то есть

$$\xi_j = A_j(\sum_{i=1}^{g} p_i).$$

С другой стороны,

$$\xi_j = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{k=1}^{g}(\oint\limits_{a_k} + \oint\limits_{b_k})(A_j^+ d\ln F^+ - A_j^- d\ln F^-) = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{k=1}^{g}\oint\limits_{a_k}[A_j^+ d\ln F^+ -$$

$$(A_j^+ + B_{jk})(d\ln F^+ - \omega_k)] + \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{k=1}^{g}\oint\limits_{b_k}[A_j^+ d\ln F^+ - (A_j^+ - 2\pi\mathtt{i}\delta_{jk})d\ln F^+] =$$

$$\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{k=1}^{g}(\oint\limits_{a_k} A_j^+\omega_k - B_{jk}\oint\limits_{a_k} d\ln F^+ + 2\pi\mathtt{i}B_{jk}) + \oint\limits_{b_j} d\ln F^+.$$

Согласно определению $F^{\pm}$
$$\oint\limits_{a_k} d\ln F^+ = 2\pi\mathtt{i}n_k, \quad \text{где} \quad n_k\in\mathbb{Z}$$
и
$$\oint\limits_{b_j} d\ln F^+ = \ln F^+(q^+) - \ln F^+(q^-) + 2\pi\mathtt{i}m =$$
$$\ln\theta(A(q^-)+B_j-e) - \ln\theta(A(q^-)-e) + 2\pi\mathtt{i}m = -\frac{1}{2}B_{jj} + e_j - A_j(q^-) + 2\pi\mathtt{i}m,$$
где $[q^-,q^+]$ — отрезок, отвечающий контуру $b_k$ и $m\in\mathbb{Z}$.

Кроме того,
$$A_j\omega_j = \frac{1}{2}d(A_j^2),$$
откуда
$$\oint\limits_{a_j} A_j\omega_k = \frac{1}{2}(A_j^2(p^-) - A_j^2(\tilde{q})) = \frac{1}{2}(A_j^2(q^-) - (A_j(q^-)-2\pi\mathtt{i})^2) = \frac{1}{2}(4\pi\mathtt{i}A_j(q^-) - (2\pi\mathtt{i})^2),$$
где $[\tilde{q},q^-]$ — отрезок, отвечающий контуру $a_k^+$. Следовательно,
$$\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{k=1}^{g}\oint\limits_{a_k} A_j^+\omega_k = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{1\le k\le g, k\ne j}^{g}\oint\limits_{a_k} A_j^+\omega_k + A_j(q^-) - \pi\mathtt{i}.$$

Таким образом
$$\xi_j = e_j - \frac{1}{2}B_{jj} + \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{1\le k\le g, k\ne j}^{g}\oint_{a_k} A_j^+\omega_k - \pi\mathtt{i}.$$

□

Из теоремы Римана о нулях следует, что $A(S^g)$ совпадает с якобианом поверхности $S$. Покажем, что почти во все точки переходит лишь одна точка симметрической степени $A(S^g)$.

Согласно теореме Римана-Роха $r(-D)\ge 1+\deg D - g$ и, следовательно, для любого положительного дивизора $D$ степени больше $g$ существует мероморфная функция, для которой $D$ — дивизор полюсов. Положительный дивизор $D$ степени $g$ называется *специальным*, если существует мероморфная функция, для которой $D$ — дивизор полюсов, и называется *неспециальным* в противном случае. Дивизор $gp$, например, специален, если и только если $p$ — точка Вейерштрасса.

**Лемма 10.2.** *Отображение Абеля симметрической степени римановой поверхности $\tilde{A}: S^gP\to J(P)$ обратимо в окрестности неспециального дивизора.*

*Proof.* Если $D$ и $D'$ — положительные дивизоры и $A(D')\equiv A(D)$, то по теореме Абеля $D' = D + (f)$. Таким образом, $D = D'$, если $D=\bigcup p_k$ — неспециальный дивизор. Рассмотрим локальные карты $z_k$ и базисные дифференциалы $\omega_i = \varphi_{ik}(z_k)dz_k$ в окрестностях точек $p_1,\dots,p_g$. Якобиан отображения Абеля в точке $D$ совпадает с определителем матрицы $\begin{pmatrix}\varphi_{11} & \dots & \varphi_{1g}\\ \dots & \dots & \dots\\ \varphi_{g1} & \dots & \varphi_{gg}\end{pmatrix}$. Этот определитель не 0, поскольку в противном случае строки матрицы линейно зависимы, откуда $i(D) > 0$ и, согласно теореме Римана-Роха, $r(-D) > 1$. Следовательно, якобиан отображения Абеля не равен 0 и в окрестности дивизора $D$. $\square$

Можно доказать также (см. например Ф.Гриффиес, Дж.Харрис, Принципы алгебраической геометрии 1, М. Мир 1982) следующие утверждения, принадлежащее Б.Риману.

**Теорема 10.2.** *Для вектора римановых констант $K$ выполнены соотношения $2K \equiv -A(\mathcal{K})$, где $\mathcal{K}$ — канонический класс, и $\{\zeta \in \mathbb{C}^g | \theta(\zeta) = 0\} \equiv A(S^{g-1}P) + K$. Функция $F_e(p) = \theta(A_{p_0}(p) - e)$ тождественно равна нулю, если и только если $e \equiv K + A(D)$, где $D$ — специальный дивизор.*

## 11. Функция Бейкера-Ахиезера.

Функция Бейкера-Ахиезера $\psi : P \to \bar{\mathbb{C}}$ — это аналог экспоненты от многочлена для римановой поверхности $P$ произвольного рода $g$. Она была детально исследована и использована для использована для решения различных проблем математики в работах И.М. Кричевера. Функция Бейкера-Ахиезера зависит от:

- точки $p_0 \in P$;
- локальной карты $z : U \to \overline{\mathbb{C}}$ в окрестности этой точки, причем $z(p_0) = \infty$;
- положительного неспециального дивизора $D \in P \setminus p_0$ степени $g$;
- многочлена положительной степени $q(z) = q_0 + q_1 z + ... + q_n z^n$ общего положения.

*Функцией Бейкера-Ахиезера* называется функция, удовлетворяющая следующим свойствам:

- функция $\psi$ мероморфна на $P - p_0$ с дивизором полюсов $D$;
- функция $\psi \exp[-q(z(p))]$ аналитична и не имеет нулей в окрестности точки $p_0$.

Множество всех функций Бейкера-Ахиезера, связанных с параметрами $(p_0, z, D, q)$, образует векторное пространство $BA(p_0, z, D, q)$.

Выберем на $P$ канонический базис циклов $\{a_i, b_i\}$. Обозначим через $\Omega^q$ нормированный условиями

$$\oint_{a_i} \Omega^q = 0 \, (i = 1, ..., g)$$

мероморфный дифференциал с единственным полюсом в точке $p_0$, вида

$$\Omega^q(p) = dq(z) + O(1)d\epsilon = q' dz + O(z^{-2})dz.$$

Интегралы

$$U_i^q = \oint_{b_i} \Omega^q \text{ формируют вектор } U^q.$$

**Лемма 11.1.** *Степень дивизора нулей $D'$ функции Бейкера-Ахиезера $\psi$ равна $g$ и $A(D') \equiv A(D) - U^q$.*

*Proof.* Рассмотрим мероморфный дифференциал $\omega = d\lg\psi = \frac{d\psi}{\psi}$. Функция $\ln(\psi\exp[-q(z(p))]) = \ln(\psi) - q(z(p))$ аналитична в окрестности $p_0$. Следовательно, дифференциалы $\omega$ и $\Omega^q$ имеют в окрестности $p_0$ одинаковые главные части и, в частности, нулевые вычеты. Таким образом, полюса дифференциала $\omega$ образуют дивизор $D+D'$. Более того, его вычеты равны 1 в точках дивизора $D'$ и $-1$ в точках дивизора $D$. Таким образом, согласно теореме о вычетах, $\deg D' = \deg D = g$.

Пусть $D = \sum\limits_{j=1}^{g} p_j$ и $D' = \sum\limits_{j=1}^{g} p'_j$. Обозначим через $\tilde{\omega}_j$ мероморфный дифференциал, голоморфный вне точек $p_j$, $p'_j$, имеющий в этих точках вычеты $-1, 1$ соответственно и нормированный условиями $\oint\limits_{a_i} \tilde{\omega}_j = 0\,(i = 1, ..., g)$. Тогда

$$\omega = \sum_{j=1}^{g} \tilde{\omega}_j + \Omega^q + \sum_{r=1}^{g} c_r\omega_r,$$

где $\{\omega_r\}$ — базис голоморфных дифференциалов, нормированный условиями $\oint\limits_{a_i} \omega_r = 2\pi\mathtt{i}\delta_{ir}$. С другой стороны,

$$\oint_{a_i} \omega = 2\pi\mathtt{i}n_i, \quad \oint_{b_i} \omega = 2\pi\mathtt{i}m_i, \text{ где } n_i, m_i \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, $c_i = n_i$ и, согласно билинейным соотношениям Римана,

$$2\pi\mathtt{i}m_i = \oint_{b_i} (\sum_{j=1}^{g} \tilde{\omega}_j + \Omega^q + \sum_{r=1}^{g} c_r\omega_r) = \sum_{j=1}^{g} \int_{p_j}^{p'_j} \tilde{\omega}_j + U_i^q + \sum_{j=1}^{g} c_j B_{jk},$$

откуда

$$(A(D') - A(D))_i = A_i(\sum_{j=1}^{g} \int_{p'_j}^{p_j} \tilde{\omega}_j) \equiv -U_i^q.$$

□

**Теорема 11.1.** *Векторное пространство $BA(p_0, z, D, q)$ одномерно и порождается функцией*

$$\psi = \exp(\int_{p_*}^{p} \Omega^q) \frac{\theta(A_{p_*}(p) - A_{p_*}(D) + U^q - K_{p_*})}{\theta(A_{p_*}(p) - A_{p_*}(D) - K_{p_*})},$$

*где $p_* \neq p_0$, $K_{p_*}$ —- вектор римановых констант и пути интегрирования для $A_{p_*}(p)$ и $\int\limits_{p_*}^{p} \Omega^q$ одинаковы.*

*Proof.* Знаменатель формулы не равен тождественно 0 в виду неспециальности дивизора $D$ (теорема 10.2). Более того, дивизор полюсов функции $\psi$ равен дивизору нулей функции $F_{A_{p_*}(D)+K_{p_*}} = \theta(A_{p_*}(p) - A_{p_*}(D) - K_{p_*})$. Согласно теореме Римана о нулях (теорема 10.1) образ этого дивизора при отображении Абеля равен $A_{p_*}(D) + K_{p_*} - K_{p_*} = A_{p_*}(D)$. Следовательно, согласно лемме 10.2 дивизор полюсов функции $\psi$ совпадает с $D$.

Докажем, что правая часть формулы не зависит от выбора пути интегрирования. Действительно, если мы добавим к пути интегрирования цикл $c = \sum\limits_{i=1}^{g} n_i a_i + \sum\limits_{i=1}^{g} m_i b_i$, то к интегралу $\int\limits_{p_*}^{p} \Omega^q$ добавится число

$$\sum_{i=1}^{g} m_i U_i^q =< M, U^q >, \text{ где } M = (m_1, ..., m_g),$$

а к вектору $A_{p_*}(p)$ добавится вектор

$$2\pi \mathtt{i} N + BM, \text{ где } N = (n_1, ..., n_g).$$

Таким образом, функция $\psi_{(p_0,\epsilon,D,q)}$ умножится на

$$\exp < M, U^q > \frac{\exp[-\frac{1}{2} < BM, M > - < M, A_{p_*}(p) - A_{p_*}(D) + U^q - K_{p_*} >]}{\exp[-\frac{1}{2} < BM, M > - < M, A_{p_*}(p) - A_{p_*}(D) - K_{p_*} >]} = 1.$$

Таким образом, функция $\psi \in BA(p_0, z, D, q)$ существует.

Рассмотрим теперь произвольную функцию $\tilde{\psi} \in BA(p_0, z, D, q)$ с дивизором нулей $\tilde{D}'$. Согласно лемме 11.1, $A(\tilde{D}') = A(D) - U^q = A(D')$. Более того, дивизоры $D'$ и $\tilde{D}'$ неспециальны, поскольку $D$ — неспециальный дивизор, а вектор $U^q$ общего положения. Таким образом, согласно лемме 10.2, $D' = \tilde{D}'$. Следовательно $\frac{\tilde{\psi}}{\psi} = const$. □

**Задача 11.1.** *Построить функции, имеющие несколько экспоненциальных точек, и доказать для них аналог последней теоремы.*

## 12. Уравнение Кадомцева-Петвиашвили.

Исследуем теперь зависимость функции Бейкера-Ахиезера из множества $BA(p_0, z, D, q)$ от коэффициентов многочлена $q(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i z^i$. Для этого удобно рассмотреть "универсальный многочлен" $q(z, x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i z^i$, где $x = (x_1, x_2, \dots)$ и лишь конечное число $x_i$ не равно 0. Каждому такому набору $x$ отвечает одномерное векторное пространство функций Бейкера-Ахиезера $BA(p_0, z, D, x) = BA(p_0, z, D, q(z, x))$.

Обозначим через $\Omega^i$ мероморфный дифференциал с нулевыми $a-$ периодами, имеющий в единственный полюс в точке $p_0$ вида

$$\Omega^i(p) = d(z^i) + O(z^{-2}) dz,$$

и обозначим через $U^i$ вектор с координатами

$$U_j^i = \oint\limits_{b_j} \Omega^i \ (j = 1, ..., g).$$

Тогда

$$\Omega^q = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \Omega^i, \quad \text{и} \quad U^q = \sum_{i=1}^{\infty} x_i U^i.$$

**Лемма 12.1.** *Векторное пространство $BA(p_0, z, D, x)$ порождается функцией*

$$\psi(z,x) = \psi(p_0, p(z), D, x) =$$

$$\exp\left(\int_{p_0}^{p} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \Omega^i\right) \frac{\theta(A_{p_0}(p) - A_{p_0}(D) + \sum_{i=1}^{\infty} x_i U^i - K_{p_0}) \theta(A_{p_0}(p_0) - A_{p_0}(D) - K_{p_0})}{\theta(A_{p_0}(p) - A_{p_0}(D) - K_{p_0}) \theta(A_{p_0}(p_0) - A_{p_0}(D) + \sum_{i=1}^{\infty} x_i U^i - K_{p_0})}$$

*В локальной карте $z$ она имеет вид*

$$\psi(z,x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_i z^{-j}\right).$$

*Proof.* Функция $\psi(z,x) =$

$$\exp\left(\int_{p_0}^{p} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \Omega^i\right) \frac{\theta(A_{p_0}(p) - A_{p_0}(D) + \sum_{i=1}^{\infty} x_i U^i - K_{p_0}) \theta(A_{p_0}(p_0) - A_{p_0}(D) - K_{p_0})}{\theta(A_{p_0}(p) - A_{p_0}(D) - K_{p_0}) \theta(A_{p_0}(p_0) - A_{p_0}(D) + \sum_{i=1}^{\infty} x_i U^i - K_{p_0})}$$

отличается от функции

$$\exp\left(\int_{p_0}^{p} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \Omega^i\right) \frac{\theta(A_{p_0}(p) - A_{p_0}(D) + \sum_{i=1}^{\infty} x_i U^i - K_{p_0})}{\theta(A_{p_0}(p) - A_{p_0}(D) - K_{p_0})}$$

из теоремы 11.1 на величину не зависящую от $z$ и, следовательно, тоже порождает $BA(p_0, z, D, x)$.

Кроме того,

$$f = \frac{\psi(z,x)}{\exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i)} = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j(x) z^{-j},$$

где $f_0 = f(0) = 1$.

Следовательно, $\psi(z,x) = \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i)(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_i z^{-j})$. □

Назовем *нормированной* функцию Бейкера-Ахиезера из леммы 12.1. Положим $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\partial = \partial_1$.

**Лемма 12.2.** *Для любой нормированной функции Бейкера-Ахиезера $\psi(z,x)$ и любого $n > 1$ существует оператор*

$$L_n = \partial^n + \sum_{i=2}^{n} B_n^i(x) \partial^{n-i}$$

*такой, что*

$$\partial_n \psi = L_n \psi$$

.

*Proof.* Из леммы 12.1 следует, что

$$\partial_n\psi = z^n \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i)(1+\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j z^{-j}) + \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i)(\sum_{j=1}^{\infty}\partial_n\xi_j z^{-j})$$

и

$$\partial^n\psi = z^n \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i)(1+\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j z^{-j}) + \sum_{r=1}^{n} z^{n-r}\exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i)(c_r\sum_{j=1}^{\infty}\partial^r\xi_j z^{-j})).$$

Поэтому существуют функции $B_i^r(x)$ такие, что

$$\partial_n\psi = \partial^n\psi + \sum_{r=2}^{i} B_n^r\partial^{n-r}\psi + \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i)(\sum_{j=1}^{\infty}\hat{\xi}_j z^{-j}).$$

Последнее слагаемое удовлетворяет аксиомам для функции Бейкера-Ахиезера и, следовательно, согласно лемме 12.1, равно 0, $\square$

**Пример 12.1.**

$$\partial\psi = z\exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i)(1+\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j z^{-j}) + \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i)(\sum_{j=1}^{\infty}\partial\xi_j z^{-j}) =$$

$$\exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i)(z+\xi_1+\sum_{j=1}^{\infty}(\xi_{j+1}+\partial\xi_j)z^{-j}).$$

$$\partial^2\psi = \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i)(z^2+z\xi_1+(\xi_2+2\partial\xi_1)+\sum_{j=1}^{\infty}(\xi_{j+2}+2\partial\xi_{j+1}+\partial^2\xi_j)z^{-j}).$$

$$\partial_2\psi = \exp(\sum_{i=1}^{N} x_i z^i)(z^2+z\xi_1+\xi_2+\sum_{j=1}^{\infty}(\xi_{j+2}+\partial_2\xi_j)z^{-j}).$$

*Таким образом*

$$\partial_2\psi = \partial^2\psi - 2\partial\xi_1\psi + \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i)(\sum_{j=1}^{\infty}\hat{\xi}_i z^{-j}).$$

*то есть* $B_2^2 = -2\partial\xi_1$.

**Задача 12.1.** *Доказать что* $B_3^2 = -3\partial\xi_2$, $B_3^3 = 3\xi_1\partial\xi_1 + 3\partial^2\xi_1 - 3\partial\xi_2$.

**Теорема 12.1.** *Положим* $u = -2\partial\xi_1 = B_2^2$. *Тогда* $\frac{3}{4}\partial_2^2 u = \partial(\partial_3 u - \frac{1}{4}(6u\partial u + \partial^3 u))$.

*Proof.* Операторы $A_2 = \partial_2 - (\partial^2 + B_2^2)$ и $A_3 = \partial_3 - (\partial^3 + B_3^2\partial + B_3^3)$ имеют общее бесконечномерное ядро $\psi(x;z)$ и, следовательно, коммутируют. Условие коммутации эквивалентно системе уравнений

$$\frac{3}{2}\partial_2 u + \frac{3}{2}\partial^2 u - 2\partial B_3^3 = 0$$

$$\partial_2 B_3^3 - \partial_3 u + \partial^3 u + \frac{3}{2}u\partial u - \partial^2 B_3^3 = 0.$$

Исключая $B_3^3$ получаем утверждение леммы. $\square$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{3}{4}\partial_2^2 u = \partial(\partial_3 u - \frac{1}{4}(6u\partial u + \partial^3 u))$$

часто возникает в различных областях математики и математической физики. Оно называется*уравнением Кадомцева-Петвиашвили* или сокращенно *КР*.

## 13. Алгебро-геометрические решения уравнений КП.

Выразим теперь решение $u$ через $\theta-$ функцию нашей римановой поверхности.

Положим $\tau(x) = \theta(A_{p_0}(p_0) - A_{p_0}(D) + \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i U^i - K_{p_0})$.

**Лемма 13.1.** *Нормированная функция Бейкера-Ахиезера имеет вид*

$$\psi(z,x) = \exp(\int\limits_{p_0}^{p} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \Omega^i) \frac{\tau(x_1 - z^{-1}, x_2 - \frac{1}{2}z^{-2}, x_3 - \frac{1}{3}z^{-3}, \dots)\tau(0)}{\tau(x_1, x_2, x_3, \dots)\tau(-z^{-1}, -\frac{1}{2}z^{-2}, -\frac{1}{3}z^{-3}, \dots)}$$

*В локальной карте $z$ она имеет вид*

$$\psi(z,x) = \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i)(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_i(x) z^{-j}),$$

*где $\xi_1(x) = -\partial \ln \tau(x) + const$*

*Proof.* Рассмотрим разложение голоморфного дифференциала $\omega_j = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} dz^{-1}$ по локальному параметру $z^{-1}$ в окрестности точки $p_0$. Применяя билинейное соотношение Римана 5.1 к паре дифференциалов $(\omega_j, \Omega^n)$ находим, что $c_{n-1} = U_j^n$. Таким образом $A_{p_0} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^{-n} U^n$ в окрестности точки $p_0$. Сопоставление с леммой 12.1 доказывает первую часть утверждения.

Рассмотрим функцию $f(z,x) = \ln \psi(z,x) - \sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i$. Равенство

$$f(z,x) = \ln(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_i(x) z^{-j})) = \xi_1(x) z^{-1} + O(z^{-1}) \quad \text{влечет} \quad \xi_1 = \frac{\partial f}{\partial z^{-1}}\Big|_{z=\infty}.$$

С другой стороны,

$$f(z,x) = \ln \tau(x_1 - z^{-1}, x_2 - \frac{1}{2}z^{-2}, x_3 - \frac{1}{3}z^{-3}, \dots) - \ln \tau(x_1, x_2, x_3, \dots) + g(z),$$

где $g(\infty) = 0$, откуда

$$\frac{\partial f}{\partial z^{-1}}\Big|_{z=\infty} = -\frac{\partial \ln \tau}{\partial x_1}\Big|_{z=\infty} + const.$$

□

Сопоставляя лемму 13.1 с теоремой 12.1 получаем

**Теорема 13.1.** *Пусть $D$ — неспециальный дивизор на римановой поверхности $P$. Тогда функция*

$$u = 2\partial^2 \ln \theta(\sum_{i=1}^{\infty} x_i U^i - (A_{p_0}(D) + K_{p_0}))$$

*удовлетворяет уравнению КР.*

Теорему 13.1 можно рассматривать как дифференциальное уравнение на $\theta$-функцию. Теорема утверждает, что уравнение *КР* выполнено, если $\theta$-функция, построена по Римановой поверхности. В конце 70-х годов С.П.Новиков высказал гипотезу, что любая $\theta$-функция, удовлетворяющая *КР* отвечает некоторой римановой поверхности. В 80-е годы эта гипотеза была доказана японским математиком Шиото. Таким образом, уравнение КП дает решение проблемы Шоттки описания $\theta$-функций римановых поверхностей. Возникающие при этом условия на римановы матрицы были найдены Б.А.Дубровиным.

На самом деле функция $v = -\partial \ln \theta(\sum_{i=1}^{\infty} x_i U^i - (A_{p_0}(D) + K_{p_0}))$ удовлетворяет бесконечному семейству независимых дифференциальных уравнений к построению которого мы и переходим.

## 14. Операторы $L_n$, согласованные с локальной экспонентой.

**Определение 14.1.** *Локальной экспонентой относительно локального параметра $z$ в окрестности $\infty$ мы называем формальную функцию вида*

$$\psi(z,x) = \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i)(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j(x) z^{-j}).$$

Примером такой функции является нормированная функция Бейкера-Ахиезера.

**Определение 14.2.** *Мы будем говорить, что оператор*

$$L_n = \partial^n + \sum_{i=2}^{n} B_n^i(x) \partial^{n-i}$$

*согласован с локальной экспонентой $\psi(z,x)$, если*

$$\partial_n \psi = L_n \psi.$$

Согласно лемме 12.2, для каждой функции Бейкера-Ахиезера существует согласованное с ней семейство операторов $L_n$.

Следующая задача продолжает пример 12.1

**Задача 14.1.** *Пусть*

$$L_n = \partial^n + \sum_{i=2}^{n} B_n^i(x) \partial^{n-i}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

*семейство операторов, согласованных с локальной экспонентой*

$$\psi(z,x) = \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i z^i)(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j(x) z^{-j}).$$

*Доказать, что*

$$B_s^t = -\sum_{i=1}^{t-1} C_s^i \partial^i \xi_{t-i} - \sum_{j=2}^{t-1} B_s^j \sum_{i=0}^{t-j-1} C_{s-j}^i \partial^i \xi_{t-i-j}$$

$$\partial_n \xi_i = \sum_{j=1}^{n+i-1} C_n^j \partial^j \xi_{i+n-j} + \sum_{k=2}^{n} B_n^k \sum_{j=0}^{n-k} C_{n-k}^j \partial^j \xi_{i+n-j-k}.$$

Коэффициенты разложения $\eta_j(x)$ функции

$$\ln \psi(x,z) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j z^j + \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j z^{-j}$$

связаны с функциями $\xi_j(x)$ соотношением

$$\xi_j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1+\cdots+i_n=j} \eta_{i_1} \cdots \eta_{i_n}.$$

Это позволяет выразить функции $B_s^t(x)$ через функции $\eta_j$. Для описания это зависимости нам понадобятся зависящие от натуральных $s, i_1, ..., i_n$ и целых неотрицательных $j_1, ..., j_n$ комбинаторные константы

$$P_s \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Они определяются рекуррентными формулами:

$$1) P_s \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = 0; \quad 2) P_s \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = C_s^j \quad \text{for } j > 0;$$

$$3) P_s \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n!} C_s^{j_1+\cdots+j_n} \frac{(j_1+\cdots+j_n)!}{j_1!\cdots j_n!} -$$

$$- \sum_{q=1}^{n-1} P_s \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_q \\ j_1 & \dots & j_q \end{pmatrix} \frac{1}{(n-q)!} C_{s-(i_1+\cdots+i_q+j_1+\cdots+j_q)}^{j_{q+1}+\cdots+j_n} \frac{(j_{q+1}+\cdots+j_n)!}{j_{q+1}!\cdots j_n!}$$

для $(j_1, ..., j_n) \neq (0, ..., 0)$.

Обозначим через $\begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{bmatrix}$ множество всех матриц, которые получаются из матрицы $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ перестановкой столбцов. Пусть $\begin{Vmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{Vmatrix}$ — число таких матриц.

Положим

$$P_s \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{bmatrix} = \sum P_s \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix},$$

где сумма берется по всем матрицам $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ из множества $\begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{bmatrix}$.

Используя индукцию можно доказать следующую лемму

**Лемма 14.1.** *Пусть $m > 0, k > 0$ и $j_t \geqslant 1$ для $t \leqslant m$. Тогда*

$$P_s \begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_m & i_{m+1} & \dots & i_{m+k} \\ j_1 & \dots & j_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

*если $s \geqslant i_1 + ... + i_m + j_1 + ... + j_m$*

*и*

$$P_s\begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_m & i_{m+1} & \dots & i_{m+k} \\ j_1 & \dots & j_m & 0 & \dots & 0\end{bmatrix} = \frac{1}{k!}\begin{Vmatrix} i_{m+1} & \dots & i_{m+k} \\ 0 & \dots & 0\end{Vmatrix} P_s\begin{bmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & j_m\end{bmatrix},$$

*если* $s < i_1 + ... + i_m + j_1 + ... + j_m$..

Сопоставляя леммы 14.1 и 14.1 получаем

**Лемма 14.2.** *Пусть* $2 \leqslant t \leqslant s$. *Тогда*

$$B_s^t = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum P_s\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n\end{pmatrix}\partial^{j_1}\eta_{i_1}\cdots\partial^{i_n}\eta_{j_n},$$

*где вторая сумма берется по всем матрицам* $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n\end{pmatrix}$ *таким, что* $i_m, j_m \geq 1$ *и* $i_1 + \dots + i_n + j_1 + \dots + j_n = t$.

*Proof.* Будем доказывать индукцией по $t$. Для $t = 2$, согласно лемме 14.1, $B_s^2 = -s\partial\xi_1 = -P_s\binom{1}{1}\partial\eta_1$. Докажем лемму для $t = N$, считая, что она доказана для $t < N$. Согласно лемме 14.1,

$$B_s^t = -\sum_{i=1}^{t-1} C_s^i \partial^i\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i_1+\dots+i_n=t-i}\eta_{i_1}\cdots\eta_{i_n}\Big) +$$

$$+\sum_{j=2}^{t-1}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i_1+\dots+j_n=j} P_s\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n\end{pmatrix}\partial^{j_1}\eta_{i_1}\cdots\partial^{j_n}\eta_{i_n}\Big)\cdot$$

$$\cdot\Big(\sum_{i=0}^{t-j-1} C_{s-j}^i\partial^j\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i_1+\dots+i_n=t-i-j}\eta_{i_1}\cdots\eta_{i_n}\Big)\Big) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\sum\Big(\frac{1}{n!}C_s^{j_1+\dots+j_n}\frac{(j_1+\dots+j_n)!}{j_1!\cdots j_n!} -$$

$$-\sum_{q=1}^{n-1} P_s\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_q \\ j_1 & \dots & j_q\end{pmatrix}\frac{1}{(n-q)!}C_{s-(i_1+\dots i_q+j_1+\dots+j_q)}^{j_{q+1}\cdots j_n}\frac{(j_{q+1}+\dots j_n)!}{j_{q+1}!\cdots j_n!}\Big)\partial^{j_1}\eta_{i_1}\cdots\partial^{j_n}\eta_{i_n} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\sum P_s\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n\end{pmatrix}\partial^{j_1}\eta_{i_1}\cdots\partial^{j_n}\eta_{i_n},$$

где вторая сумма берется по всем матрицам $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n\end{pmatrix}$ таким, что $i_1 + \dots + i_n + j_1 + \dots + j_n = t$, $i_m \geqslant 1, j_m \geqslant 0$. Согласно лемме 14.1 можно считать, что последняя сумма берется лишь по положительным $j_m > 0$. □

**Теорема 14.1.**

$$\partial_s\eta_r = \sum_{n=1}^{\infty}\sum P_s\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n\end{pmatrix}\partial^{j_1}\eta_{i_1}\cdots\partial^{j_n}\eta_{i_n},$$

*где вторая сумма берется по всем матрицам* $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n\end{pmatrix}$ *таким, что* $i_m \geqslant 1, j_m \geqslant 1$ *и* $i_1 + \dots + i_n + j_1 + \dots + j_n = r + s$.

*Proof.* Будем доказывать индукцией по $r$. При $r = 1$, согласно леммам 14.1 и 14.2,

$$\partial_s \eta_1 = \partial_s \xi_1 = \sum_{j=1}^{\infty} C_s^j \partial^j \xi_{s+1-j} + \sum_{k=2}^{s} B_s^k \sum_{j=0}^{s-k} C_{s-k}^j \partial^j \xi_{1+s-j-k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} C_s^j \partial^j \xi_{s+1-j} - \sum_{k=2}^{\infty} \Big( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1+\dots+j_n=k} P_s \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \partial^{j_1} \eta_{i_1} \cdots \partial^{j_n} \eta_{i_n} \Big) \cdot$$

$$\cdot \Big( \sum_{j=0}^{s-k} C_{s-k}^j \partial^j \xi_{1+s-j-k} \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum P_s \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \partial^{j_1} \eta_{i_1} \cdots \partial^{j_n} \eta_{i_n},$$

где вторая сумма берется по всем матрицам $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ таким, что $i_1 + \dots + i_n + j_1 + \dots + j_n = s + 1$, $i_m \geqslant 1$, $j_m \geqslant 0$. Согласно 14.1 можно считать, что сумма берется лишь по положительным $j_m > 0$.

Таким образом, для $r = 1$ теорема доказана.

Докажем теперь теорему для $r = N$, считая, что она доказана для $r < N$. Согласно лемме 14.1,

$$\partial_s \Big( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1+\dots+i_n=r} \eta_{i_1} \cdots \eta_{i_n} \Big) = \sum_{j=1}^{s+r-1} C_s^j \partial^j \xi_{s+r-j} + \sum_{k=2}^{\infty} B_s^k \sum_{j=0}^{s-k} C_{s-k}^j \partial^j \xi_{r+s-j-k}.$$

Таким образом, согласно леммам 14.2, 14.1 и предположению индукции

$$\partial_s \eta_r = \sum_{j=1}^{\infty} C_s^j \partial^j \Big( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1+\dots+i_n=s+r-j} \eta_{i_1} \cdots \eta_{i_n} \Big) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \Big( \sum_{i_1+\dots+j_n=k} P_s \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \partial^{j_1} \eta_{i_1} \cdots \partial^{j_n} \eta_{i_n} \Big) \cdot$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{s-k} C_{s-k}^j \partial^j \Big( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1+\dots+i_n=r+s-j-k} \eta_{i_1} \cdots \eta_{i_n} \Big) - \partial_s \Big( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1+\dots+i_n=r} \eta_{i_1} \cdots \eta_{i_n} \Big) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum P_s \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix} \partial^{j_1} \eta_{i_1} \cdots \partial^{j_n} \eta_{i_n},$$

где вторая сумма берется по всем матрицам $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_n \\ j_1 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ таким, что $i_1 + \dots + i_n + j_1 + \dots + j_n = s + r$, $i_m \geqslant 1, j_m \geqslant 1$. $\square$

## 15. Тау-функция и КП–иерархия

**Определение 15.1.** *Формальную функцию $\tau(x) = \tau(x_1, x_2, \dots)$ назовем тау-функцией, если для локальной экспоненты*

$$\psi(z, x) = \exp\big(\sum x_j (z^j + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} z^{-i})\big) \frac{\tau(x_1 - z^{-1}, x_2 - \frac{1}{2} z^{-2}, x_3 - \frac{1}{3} z^{-3}, \dots)}{\tau(x_1, x_2, x_3, \dots)}$$

*существует семейство согласованных с ней операторов*

$$L_n = \partial^n + \sum_{i=2}^{n} B_n^i(x)\partial^{n-i}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Представим систему дифференциальных уравнений из леммы 14.2 как систему дифференциальных уравнений на функцию

$$v(x) = -\ln \tau(x).$$

Нетрудно видеть, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j z^{-j} = \ln \psi(x,z) - \sum_{j=1}^{\infty} x_j z^j = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} x_j z^{-i} + \ln \tau(x_1 - z^{-1}, x_2 - \frac{1}{2} z^{-2}, \ldots) - \ln \tau(x_1, x_2, \ldots)$$

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ji} x_i z^{-j} - v(x_1 - z^{-1}, x_2 - \frac{1}{2} z^{-2}, \ldots) + v(x) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ji} x_i z^{-j} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1 + \cdots + i_n = j} \frac{(-1)^{n+1}}{n! i_1 \ldots i_n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} v(x) z^{-j}.$$

Таким образом,

$$\eta_r = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i_1 + \cdots + i_n = r} \frac{(-1)^{n+1}}{n! i_1 \ldots i_n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} v + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ri} x_i. \tag{1}$$

Положим $\tilde{\eta}_r = \partial \eta_r$ и $\tilde{v} = \partial v$.

**Теорема 15.1.** *Существуют универсальные рациональные коэффициенты*

$$R_r \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_n \\ t_1 & \ldots & t_n \end{pmatrix}, R_{ij} \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_n \\ t_1 & \ldots & t_n \end{pmatrix}$$

*такие, что*

$$\tilde{\eta}_r = \frac{1}{r} \partial_r \tilde{v} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum R_r \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_n \\ t_1 & \ldots & t_n \end{pmatrix} \partial_{s_1} \partial^{t_1} \tilde{v} \cdots \partial_{s_n} \partial^{t_n} \tilde{v} + const, \tag{2}$$

$$\partial_i \partial_j \tilde{v} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum R_{ij} \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_n \\ t_1 & \ldots & t_n \end{pmatrix} \partial_{s_1} \partial^{t_1} \tilde{v} \cdots \partial_{s_n} \partial^{t_n} \tilde{v}, \tag{3}$$

*где вторые суммы берутся по всем матрицам* $\begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_n \\ t_1 & \ldots & t_n \end{pmatrix}$ *таким, что* $s_m \geqslant 1$, $t_m \geqslant 0$ *и сумма* $s_1 + \cdots + s_n + t_1 + \cdots + t_n$ *равна* $r$ *для (2) и* $i + j$ *для (3).*

*Proof.* Будем доказывать совместной индукцией по $k$ и $i + j$. Для $i + j = 2$ теорема очевидна. Для $r = 1$ она следует из (2). Докажем теорему для $i + j = N$ и $r = N - 1$, считая, что она верна при $i + j < N$ и $r < N - 1$. Ниже мы считаем, что $s_m, t_m \geqslant 1$ и $\sigma_n = s_1 + \cdots + s_n + t_1 + \cdots + t_n$. Тогда согласно (1) и (3)

$$\tilde{\eta}_r = \frac{1}{r} \partial_r \tilde{v} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{s_1 + \cdots + s_n = r} \frac{(-1)^{n+1}}{n! s_1 \cdots s_n} \partial_{s_1} \cdots \partial_{s_n} \tilde{v}(x) =$$

$$= \frac{1}{r}\partial_r \tilde{v} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\sigma_n = r} R_r \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \partial_{s_1}\partial^{t_1}\tilde{v} \cdots \partial_{s_n}\partial^{t_n}\tilde{v} + const.$$

Таким образом, согласно (2), (3) и теореме 14.1

$$\frac{1}{j}\partial_i\partial_j\tilde{v} = \partial_i\tilde{\eta}_j - \partial_i\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\sigma_n=j} R_j \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \partial_{s_1}\partial^{t_1}\tilde{v} \cdots \partial_{s_n}\partial^{t_n}\tilde{v}\Big) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\sigma_n=i+j} P_i \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \partial^{t_1}\tilde{\eta}_{s_1} \cdots \partial^{t_n}\tilde{\eta}_{s_n} -$$

$$-\partial_i\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\sigma_n=j} R_j \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \partial^{t_1}\partial_{s_1}\tilde{v} \cdots \partial^{t_n}\partial_{s_n}\tilde{v}\Big) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s_1+\dots+s_n+n=i+j} P_i \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \partial(\frac{1}{s_1}\partial_{s_1}\tilde{v}) \cdots \partial(\frac{1}{s_n}\partial_{s_n}\tilde{v}) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\sigma_n=i+j, t_1+\dots+t_n>n} R_{ij} \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \partial_{s_1}\partial^{t_1}\tilde{v} \cdots \partial_{s_n}\partial^{t_n} v.$$

□

Система дифференциальных уравнений 3 называется *иерархией КП* в таком виде она впервые была предложена Б.А. Дубровиным и С.М. Натанзон конце 80 годов из анализа уравнений Хироты и в работах С.М.Натанзона, с использованием того же подхода, что и этих лекциях.

Из теоремы 15.1 следует, что формальное (то есть представленное степенным рядом) решение иерархии КП однозначно определяется произвольным бесконечным набором рядов от одной переменной $f_i(x_1) = \partial_i\tilde{v}|_{x_2=x_3=\dots=0}$ $(i = 1, 2, \dots)$. Эти функции естественно рассматривать как данные Коши иерархии. Недавно А.В.Забродин и С.М.Натанзон доказали что любому набору таких данных Коши отвечает решении иерархии и, с помощью деформаций иерархии КП нашли алгоритм построения такого решения.

Процедура, описанная при доказательстве теоремы 15.1, позволяет явно найти все рациональные константы $R_{ij}\begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix}$. Приведем первые из уравнений иерархии (3):

$$\partial_2^2\tilde{v} = \frac{4}{3}\partial_3\partial\tilde{v} - \frac{1}{3}\partial^4\tilde{v} + 2(\partial\tilde{v})^2,$$

$$\partial_3\partial_2\tilde{v} = \frac{3}{2}\partial_4\partial\tilde{v} - \frac{3}{2}\partial_2\partial^3\tilde{v} + 3\partial(\partial_2\tilde{v}\partial\tilde{v}),$$

$$\partial_3^2\tilde{v} = \frac{9}{5}\partial_5\partial\tilde{v} - \partial_3\partial^3\tilde{v} + \frac{1}{5}\partial^6 v + 3\partial(\partial_3\tilde{v}\partial\tilde{v}) + \frac{9}{4}\partial(\partial_2\tilde{v})^2 - 3\partial(\partial^3\tilde{v}\partial\tilde{v}) - \frac{9}{4}\partial(\partial^2\tilde{v})^2 + 3\partial(\partial\tilde{v})^3.$$

Решение $\tilde{v}$ первого из них порождает решение $u = \partial\tilde{v}$ уравнения КП.

## 16. Иерархия $n$-К$\partial$Ф.

Иерархия КП, дополненная уравнением $\partial_n v = 0$ называется *иерархией $n$-К$\partial$Ф* или иерархией Гельфанда–Дикого. В этом случае согласно теореме 4.1

$$0 = \partial_m \partial_n v =$$

$$= \frac{mn}{m+n-1}\partial_{n+m-1}\partial v + \sum_{m=1}^{\infty}\sum R_{mn}\begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix}\partial_{s_1}\partial^{t_1}v\cdots\partial_{s_m}\partial^{t_m}v,$$

где $1 \leqslant s_j \leqslant n+m-2,\ t_j \geqslant 1$. Это позволяет рекуррентно выразить функции $\partial_k \partial v$ при $k > n$ через функции $\partial_r \partial v$, где $r < n$, то есть найти соотношение

$$\partial_{n+r}\tilde{v} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum N^m_{1(n+1)}\begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix}\partial_{s_1}\partial^{t_1}\tilde{v}\cdots\partial_{s_m}\partial^{t_m}\tilde{v}, \tag{4}$$

где $t_j \geqslant 0,\ s_j < n, \quad \sum_{j=1}^m (s_j + t_j) = n + r + 1$.

При $n = 2$ система (4) переходит иерархию $K\partial$Ф.

Сопоставляя системы (4) и (3) находим систему

$$\partial_i\partial_j\tilde{v} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum N^m_{i_j}\begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix}\partial_{s_1}\partial^{t_1}\tilde{v}\cdots\partial_{s_m}\partial^{t_m}\tilde{v}, \tag{5}$$

где $i,j \geqslant 1,\ 1 \leqslant s_\alpha \leqslant n-1,\ t_\alpha \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^m (s_\alpha + t_\alpha) = i + j$ и $N^m_{ij}\begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix}$ — некоторые универсальные рациональные коэффициенты.

**Примеры**

1. При $n = 2$ первое из уравнений системы 5 — это уравнение $K\partial$Ф.

$$\partial_3\tilde{v} = \frac{3}{4}\tilde{v}^2 + \frac{1}{4}\partial^4\tilde{v}.$$

2. При $n = 3$ первое из уравнений системы 5 — это уравнение Буссинеска

$$\partial_2^2\tilde{v} = -\frac{1}{3}\partial^4\tilde{v} + 2\partial((\partial\tilde{v})^2).$$

Коэффициенты $N^m_{i_1\cdots i_k}\begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix}$ являются рациональными константами. Использованные при их построении конструкции дают рекурентные формулы для их вычисления.

Структура системы (5) такова, что ее формальное решение однозначно с точностью до константы, определяется произвольным набором из $n-1$ рядов от одной переменной $f_i(x_1) = \partial_i\tilde{v}|_{x_2=x_3=\cdots=0}$ $(i = 1, ..., n-1)$, которые можно интерпретировать, как данные Коши для $n$-К$\partial$Ф. Более того, уравнения (4) позволяют найти данные Коши для соответствующего решения иерархии КП. Это позволяет найти решение иерархии $n$-К$\partial$Ф по ее данным Коши.

## 17. Алгебро-геометрические решения иерархий КП и $n$-К$\partial$Ф.

Положим

$$\tau(x) = \theta(A_{p_0}(p_0) - A_{p_0}(D) + \sum_{i=1}^{\infty} x_i U^i - K_{p_0})$$

и рассмотрим функцию Бейкера-Ахиезера

$$\psi(z,x) = \exp(\int_{p_0}^{p} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \Omega^i) \frac{\tau(x_1 - z^{-1}, x_2 - \frac{1}{2}z^{-2}, x_3 - \frac{1}{3}z^{-3}, \dots)\tau(0)}{\tau(x_1, x_2, x_3, \dots)\tau(-z^{-1}, -\frac{1}{2}z^{-2}, -\frac{1}{3}z^{-3}, \dots)}.$$

Согласно лемме 12.2 $\psi(z,x)$ — это локальная экспонента, согласованая с дифференциальными операторами

$$L_n = \partial^n + \sum_{i=2}^{n} B_n^i(x)\partial^{n-i},$$

то есть

$$\partial_n \psi = L_n \psi.$$

Таким образом, функция

$$\tilde{v} = -\partial \ln \theta(A_{p_0}(p_0) - A_{p_0}(D) + \sum_{i=1}^{\infty} x_i U^i - K_{p_0})$$

является решением иерархии КП. Такое решение впервые было получено И.М.Кричевером в 1976 году

Рассмотрим теперь пару $(P, f)$, состоящую из римановой поверхности $P$ и мероморфной функции $f : P \to \mathbb{C}$ с единственным полюсом в точке $p_0$. Пусть $n$ — порядок этого полюса и $z^{-1}$ — локальная карта в окрестности точки $p_0$ в окрестности которой функция $f$ имеет вид $z \mapsto z^n$. Тогда $\Omega^n = df$ и, следовательно, $U^n = 0$. В этом случае $\tilde{v}$ не зависит от $x_n$ и, следовательно, является решением $n$-К$\partial$Ф. Для обычного 2-К$\partial$Ф такое решение впервые было получено А.П. Итсом и В.Б. Матвеевым в 1975 году