Дискретная математика и приложения
Листок 2

ВШЭ, факультет математики, первый курс

Хроматическим числом $\chi(G)$ графа G называется минимальное количество цветов, в которые можно правильно покрасить вершины графа G.

1. Найдите все целые k, для которых существует граф G и его ребро u такие, что $\chi(G) - \chi(G-u) = k$.

2. Пусть V – множество вершин, E_1, E_2 – некоторые множества рёбер с концами из V. Докажите, что $\chi(V, E_1)\chi(V, E_2) \geq \chi(V, E_1 \cup E_2)$.

3. Докажите, что при любых r_1, r_2 найдутся такие E_1, E_2, что $r_1 = \chi(V, E_1)$, $r_2 = \chi(V, E_1)$ и неравенство из предыдущей задачи является равенством.

4. Докажите, что не существует графа с хроматическим многочленом $t^4 - 3t^3 + 3t^2$.

Раскраска рёбер графа называется правильной, если любые два ребра, имеющие общую вершину, окрашены в разные цвета.

5. Обозначим через $\chi'_G(t)$ количество правильных раскрасок рёбер графа G в t цветов. Докажите, что функция χ'_G является многочленом от t. Найдите степень этого многочлена и старший коэффициент.

6. Пусть $e = \deg\, \chi'_G(t)$. Найдите коэффициент при t^{e-1}.

Мостом называется ребро, при удалении которого количество связных компонент графа увеличивается.

7. Пусть T_G – число остовных лесов (т. е. объединений остовов его компонент) графа G. Докажите, что $T_G = T_{G-u} + T_{G/u}$.

8. Пусть T_G – число подграфов, являющихся лесами. Докажите, что $T_G = T_{G-u} + T_{G/u}$.

9. Существует такая раскраска рёбер графа $K_{m,n}$ в два цвета, что число одноцветных подграфов $K_{a,b}$ не больше $\binom{m}{a}\binom{n}{b}2^{1-ab}$.

10. Если степень каждой вершины графа не превосходит $d \geq 3$ и нет полного подграфа на $(d+1)$-ой вершине, то вершины графа можно правильно раскрасить в d цветов.