Элементы теории ортогональных многочленов.

В предыдущей лекции мы показали, что корреляционные ф-ии выражаются через самовоспроизводящее ядро

$$K(x,y) = \sum_{ij} p_i(x) H^{-1}_{ij} \tilde{p}_j(y),$$

где $p_i(x)$, $\tilde{p}_j(y)$ — многочлены, а $H_{ij} = \langle p_i | \tilde{p}_j \rangle$.

Для явных вычислений можно выбрать такие многочлены, для которых матрица H — диагональна. Для этого нужно построить систему ортогональных многочленов, что всегда можно сделать, используя процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

---

1) Ортогонализация.

Пусть $\alpha(x)$ — некоторая неубывающая ф-ия на $a \le x \le b$, где a и b могут быть конечны или бесконечны и $\lim\limits_{x\to a,b} \alpha(x) < \infty$.

Определим скалярное произведение в $L^2([a,b], d\alpha)$

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_a^b \varphi(x) \psi(x)\, d\alpha(x).$$

Теорема. (Ортогонализация Гамма-Шмидта)

Пусть $f_0(x), \dots, f_e(x)$ — веществ. линейно независимые на носителе $d\alpha$ ф-ии из $L^2([a,b], d\alpha)$. Тогда $\exists !$ ортонормированная система $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$, такая, что

$$\varphi_n(x) = \lambda_{nn} f_n(x) + \dots + \lambda_{n0} f_0(x), \quad \lambda_{nn} > 0$$

и

$$\langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm}.$$

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$$\varphi_0 = f_0, \quad \varphi_1 = f_1 - \frac{\langle f_1|\varphi_0\rangle}{\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle}\varphi_0, \quad \varphi_2 = f_2 - \frac{\langle f_2|\varphi_1\rangle}{\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle}\varphi_1 - \frac{\langle f_2|\varphi_0\rangle}{\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle}\varphi_0, \ldots$$

Нормировка: $\varphi_i \to \varphi_i / \sqrt{\langle\varphi_i|\varphi_i\rangle}$

Общая формула:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{D_n D_{n-1}}\; d_n(x)$$

$$D_n = \det\left(\langle f_i, f_j\rangle\right)_{0\le i,j\le n} \quad n \ge 1 \quad D_{-1} := 1$$

$$d_n(x) = \begin{vmatrix} \langle f_0, f_0\rangle & \cdots & \langle f_0, f_n\rangle \\ & & \\ \langle f_{n-1}, f_0\rangle & \cdots & \langle f_{n-1}, f_n\rangle \\ f_0(x) & \cdots & f_n(x) \end{vmatrix} \qquad d_0(x) := f_0(x)$$

Док-во: $\langle d_n, f_m\rangle = 0$ при $m<n \Rightarrow \langle\varphi_n, \varphi_m\rangle = 0$

$$\langle d_n, \varphi_n\rangle = \lambda_{nn}\langle d_n, f_n\rangle = \lambda_{nn} D_n$$

$$\Rightarrow \langle\varphi_n, \varphi_n\rangle = (D_n D_{n-1})^{-1/2}\langle d_n|\varphi_n\rangle = \lambda_{nn}\sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}}$$

из опред $d_n(x) = f_n(x) D_{n-1} + \ldots \Rightarrow \lambda_{nn} = \frac{D_{n-1}}{\sqrt{D_n D_{n-1}}} = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}$

откуда получим $\langle\varphi_n, \varphi_n\rangle = 1$. □

можно поделить $\tilde{\varphi}_n$ на λ_{nn} и получить систему со старшим коэффициентом $\lambda_{nn} = 1$.

$$\tilde{\varphi}_n = \frac{d_n}{D_{n-1}} \qquad \langle\tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_m\rangle = \delta_{nm} h_n := \frac{D_n}{D_{n-1}}$$

Пусть $f_n(x) = m_n(x) := x^n$ и пусть для $\forall n$ существуют моменты $\mu_n = \int_a^b x^n \, d\alpha(x) = \langle m_m ; m_k \rangle$ при $m+k$.

Если носитель $d\alpha(x)$ содержит бесконечное число точек, то m_n — линейно независимы на носителе $d\alpha$ и можно задать систему ортогональных многочленов. (Для меры с носителем в конечном числе точек N можно построить систему N многочленов)

Будем рассматривать унитарные многочлены:

$$D_n = \det(\mu_{i+j})_{0 \le i,j \le n}$$

$$p_N(x) = \frac{1}{(\det \mu_{i+j})_{0\le i,j \le N-1}} \det \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_N \\ \mu_1 & & & \\ \mu_{N-1} & \mu_N & & \mu_{2N-1} \\ 1 & x & & x^N \end{pmatrix}$$

Другие представления ортогональных многочленов

Формула Гейне: $p_k(x) = \mathbb{E}(\det(X - M)) = \mathbb{E}(\prod_i (\lambda - \lambda_i))$
(Доказать, что $\langle p_k, m_n \rangle = \delta_{kn} h_k$

Пусть $d\alpha(x) = w(x)\,dx$, $w(x) \geq 0$

Удобно ввести фурье базис $\varphi_k(x) = \sqrt{\dfrac{w(x)}{h_k}}\, p_k(x)$

$\{\varphi_k\}$ – ортогональная система по отношению к мере Лебега:

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \int \varphi_k(x)\varphi_j(x)\,dx = \delta_{kj}.$$

$$\boxed{K_N(x,y) = \sum_{k=0}^{N-1} \varphi_k(x)\varphi_k(y)}$$

Рекуррентные соотношения.

Теорема. Система унитарных ортогональных многочленов удовлетворяет трёхчленным рекуррентным соотношениям.

$$p_{k+1} + (A_k - x)p_k + B_k p_{k-1} = 0$$

Док-во:

обозначим $m_1 := x$

Разложим $m_1 p_k$ по базису орт. мног.

$$m_1 p_k = \sum_{j=0}^{k+1} \hat{Q}_{kj} p_j \qquad \underline{\hat{Q}_{k,k+1} = 1}$$

умножим на p_e

$$h_e \hat{Q}_{ke} = \langle m_1 p_k, p_e \rangle = \langle p_k, m_1 p_e \rangle = \hat{Q}_{ek} h_k$$

Т.к. $\hat{Q}_{kj} = 0$ при $j > k+1$, то не равны нулю

только $\hat{Q}_{kk} = \dfrac{\langle m_1 p_k, p_k \rangle}{h_k}$ и $\hat{Q}_{kk+1} h_{k+1} = \hat{Q}_{k+1k} h_k \Rightarrow \hat{Q}_{k+1k} = \dfrac{h_{k+1}}{h_k}$

получим $B_k = \hat{Q}_{k,k-1} = \dfrac{h_k}{h_{k-1}}$, $A_k = \hat{Q}_{kk} = \dfrac{\langle m_1 p_k, p_k \rangle}{h_k}$ □

Матрица Якоби.

Введем $Q_{j,k} = Q_{k,j} = \sqrt{\frac{h_j}{h_k}}\,\hat{Q}_{k,j}$

$$m_1 \psi_k = Q_{k,k+1}\psi_{k+1} + Q_{kk}\psi_k + Q_{k+1,k}\psi_{k-1}$$

$$Q = \begin{pmatrix} s_1 & \gamma_1 & & \\ \gamma_1 & s_2 & \gamma_2 & \\ & \gamma_2 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$$ — матрица Якоби (бесконечная)

$\gamma_k = Q_{k,k-1} = Q_{k-1,k} = \sqrt{\frac{h_k}{h_{k-1}}}$ $\qquad s_k = Q_{k,k}$

Еще одно представление $p_k(\lambda)$:

$$p_k(\lambda) = \det(\lambda - Q)\Big|_{k\times k} \qquad K_N = \frac{\sqrt{w(x)w(y)}}{h_{N-1}} \det_{N-1\times N-1}\left((x-Q)(y-Q)\right)$$

Формула Кристофеля-Дарбу:

$$K(x,y) = \sum_{n=0}^{N-1}\psi_n(x)\psi_n(y) = \gamma_N\frac{\psi_{N-1}(x)\psi_N(y) - \psi_N(x)\psi_{N-1}(y)}{y-x}$$

$$(x-y)\sum_{n=0}^{N-1}\psi_n(x)\psi_n(y) = \sum_{k=0}^{N-1}\Big[\left(Q_{k,k+1}\psi_{k+1}(x) + Q_{kk}\psi_k(x) + Q_{k\,k-1}\psi_{k-1}(x)\right)\psi_k(y)$$

$$-(x\leftrightarrow y)\Big] = \sum_{k=0}^{N-1}\Big[Q_{k,k+1}\left(\psi_{k+1}(x)\psi_k(y) - \psi_{k+1}(y)\psi_k(x)\right) +$$

$$- Q_{k\,k-1}\left(\psi_k(x)\psi_{k-1}(y) - \psi_{k-1}(y)\psi_k(x)\right)\Big] = Q_{N-1,N}\left(\psi_N(x)\psi_{N-1}(y) - \psi_{N-1}(x)\psi_N(y)\right)$$

Для $x=y$ можно взять предел

$$K_N(x,x) = \lim_{y\to x} K(x,y) = \lim_{y\to x}\gamma_N\frac{\psi_N(x)\psi_{N-1}(y) - \psi_N(x)\psi_{N-1}(x) + \psi_N(x)\psi_{N-1}(x) - \psi_{N-1}(x)\psi_N(y)}{x-y}$$

$$= \left(-\psi_N(x)\psi'_{N-1}(x) + \psi'_N(x)\psi_{N-1}(x)\right)\gamma_N$$

Трёхчленные рекуррентные соотношения — фундаментальное св-во ортогональных многочленов, которое можно принять как их определение:

Теорема. (Favard)

Пусть система унитарных многочленов $P_n(x)$ удовлетворяет трёхчленным рекуррентным соотношениям

$$P_{k+1} + (A_k - x) P_k + B_k P_{k-1} = 0$$

где $B_n > 0$. Тогда $\exists$ неубыв. ф-ия $\alpha(x)$, такая, что

$$\int P_n(x) P_m(x) \, d\alpha(x) = \delta_{n,m} h_n.$$

Замечание.

1) Мера не единственна.
2) Проблема единственности меры эквив. проблеме моментов.
3) Если мера единственна, то $\{P_n(x)\}_n^\infty$ плотно в $L^2(\alpha)$.

Классические ортогональные многочлены.

Мы видели, что система ортогональных задаётся произвольным выбором меры $\alpha(x)$ или, эквивалентно, заданием трёхчленных рекуррентных соотношений.

В дальнейшем нам понадобится проводить асимптотический анализ ортогональных многочленов с заданной мерой. Существует общий метод такого анализа, основанный на переформулировке задачи об ортогональных многочленах в виде задачи Римана-Гильберта. Однако эти методы сложны и их изложение выходит за рамки данного курса.

Среди множества ортогональных многочленов общего вида существует выделенное семейство „хороших“ многочленов, которые обладают дополнительными свойствами, значительно упрощающими анализ.

Как было замечено, любые ортогональные многочлены как функции их номера удовлетворяют разностному ур-ю второго порядка — трёхчленным рекуррентным соотношениям.

Семейства классических ортогональных многочленов выделяются тем, что они удовлетворяют подобному соотношению и по их аргументу.

Классическими ортогональными многочленами (в узком смысле) называются ортогональные многочлены, удовлетворяющие задаче на собств. значения:

$$L p_n(x) = \lambda_n p_n(x),$$

где L – дифференциальный оператор 2-го порядка, не зависящий от n.
Согласно теореме Бохнера существует всего 3 семейства таких многочленов

Эрмита: $H_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$ $\quad w(x) = e^{-x^2}$

Лагерра: $L_n^{\alpha}(x)$, $\quad x \in \mathbb{R}_+$ $\quad w(x) = x^{\alpha} e^{-x}$

Якоби: $P^{\alpha,\beta}(x)$, $\quad x \in [-1, 1]$ $\quad w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$

Классические ортогональные многочлены в широком смысле удовлетворяют разностным или q-разностным ур-ям 2-го порядка:

$$L f(x) = a_x f(x+1) + b_x f(x) + c_x f(x-1)$$

или

$$L f(x) = a_x f(xq) + b_x f(x) + c_x f(xq^{-1}).$$

Примеры:
Многочлены Шарлье: $C_n(x, a)$, $\quad w(x) = \frac{a^x}{x!}$ $\quad x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Многочлены Кравчука: $k_n^p(x)$, $\quad x \in 0, \dots, N$, $w(x) = p^x q^{N-x} \binom{N}{x}$
$n = 0, \dots, N$

q-Эрмит: $h_n(x; q)$ $\quad x \in \pm q^j$, $j = 0, 1, 2, \dots$ $\quad w_j = q^j \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k+2j+2})$