Лекция 5

Лемма 1 (5.1). *(Техническая лемма.) Следующие формулы общезначимы:*

(i) $t = s \to r(t) = r(s)$,
(ii) $t = s \to \varphi(t) = \varphi(s)$.

Здесь: r, s, t *— термы,* φ *— формула;*
$r(t)$ *обозначает* $[t/x]r$ *для некоторой переменной* x*; аналогично,* $r(s)$ *обозначает* $[s/x]r$*;*
$\varphi(t)$ *обозначает* $[t/x]\varphi$ *для некоторой переменной* x *и свободной подстановки* $[t/x]$ *в* φ*; аналогично,* $\varphi(s)$ *— это* $[s/x]\varphi$ *для свободной* $[s/x]$.

Лемма доказывается индукцией по длине r и φ соответственно.

Лемма 2 (5.2). *В построенной в лекции 4 модели (модель полной непротиворечивой теории Хенкина, состоящая из (дубликатов) замкнутых термов) имеем:*

$$|\varphi(\underline{t})|_M = |\varphi(t)|_M.$$

Здесь t — замкнутый терм, φ — формула; $\varphi(t)$ обозначает $[t/x]\varphi$ для некоторой переменной x. Очевидно, подстановка $[t/x]$ в φ свободна, т.к. t замкнут.

Доказательство. По лемме 5.1 общезначима импликация

$$t = x \to (\varphi(t) \leftrightarrow \varphi(x)) \qquad (I)$$

В частности, эта формула верна в M при оценке θ, переводящей x в $\underline{t}$ (а другие переменные — куда угодно). Т.е. $|x|_{M,\theta} = \underline{t}$. И, как мы знаем (лекция 4),

$$|t|_M = \underline{t},$$

независимо от оценки. Значит, посылка (I) истинна при θ, а потому заключение тоже истинно, т.е.

$$|\varphi(t)|_{M,\theta} = |\varphi(x)|_{M,\theta}.$$

Левая часть не зависит от оценки и записывается как $|\varphi(t)|_M$. Правая часть — это как раз $|\varphi(\underline{t})|_M$. Лемма доказана. ■

В дальнейшем все теории — с равенством, а модели — нормальные.

Теорема 1 (5.3). *(Теорема Лёвенгейма — Сколема о повышении мощности.) Если T — теория в сигнатуре L, $|L| \leq k$ и для любого конечного n теория T имеет модель мощности $\geq n$, то T имеет модель мощности k.*

Доказательство. Добавим к L множество новых констант $\{c_i \mid i \in I\}$, где $|I| = k$ и построим в этой новой сигнатуре L^+ теорию

$$T^+ := T \cup \{c_i \neq c_j \mid i, j \in I, i \neq j\}.$$

Всякое конечное подмножество T^+ содержится в теории вида

$$T' := T \cup \{c_i \neq c_j \mid i, j \in I', i \neq j\},$$

где I' конечно. Любая такая теория имеет модель: если $|I'| = n$, то возьмем модель T мощности $\geq n$ и проинтерпретируем в ней константы c_i для $i \in I'$ какими-нибудь разными элементами. Следовательно, все такие теории непротиворечивы, а потому и T^+ непротиворечива.

Заметим, что $|L^+| = k$ (по свойствам мощностей). Тогда по теореме 4.7 T^+ имеет модель M мощности $\leq k$. Но, благодаря новым аксиомам, в имеются k различных элементов (интерпретации новых констант c_i), поэтому $|M| = k$. Это и будет искомая модель T, если забыть про константы. ■

Определение 1. Пусть k — бесконечная мощность. Теория T называется k-категоричной, если все ее модели мощности k изоморфны.

Теорема 2 (5.4). *(Признак полноты Лося —- Вота.) Если теория T в сигнатуре L не имеет конечных моделей и k-категорична для некоторой мощности $k \geq |L|$, то T полна.*

Доказательство. Допустим, что такая теория неполна. Тогда для некоторой замкнутой φ имеем $T \nvdash \varphi, \neg\varphi$. Поэтому теории $T \cup \{\neg\varphi\}$, $T \cup \{\varphi\}$ непротиворечивы. Значит, они имеют модели, и эти модели должны быть бесконечны, поскольку T не имеет конечных моделей. Значит, по теореме 5.3, $T \cup \{\neg\varphi\}$, $T \cup \{\varphi\}$ имеют модели мощности k. Получаем две модели мощности k, которые не элементарно эквивалентны, а потому не изоморфны. Это противоречит k-категоричности. ■

Пример 1 Теория DLO неограниченных плотных линейных порядков $\aleph_0$-категорична (теорема Кантора, см. лекцию 6).

Пример 2 Теория бесконечных множеств в сигнатуре $(=)$. Аксиомы ее имеют вид

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j.$$

Она k-категорична для всех бесконечных k: ее модели — это просто бесконечные множества без дополнительной структуры.

Пример 3 Теория TFDA делимых абелевых групп без кручения в сигнатуре $(+, 0, =)$.

Аксиомы этой теории:

I. Аксиомы абелевых групп.

II.(TF) $\forall x\, (x \neq 0 \to n \cdot x \neq 0)$

(D) $\forall x \exists y\, (n \cdot y = x)$

для всех натуральных $n > 1$.

Здесь $n \cdot x$ обозначает терм $\underbrace{x + \ldots + x}_{n}$ (формально он должен записываться со скобками, например, идущими слева).

Теорема 3. *TFDA k-категорична для всех несчетных k.*

Схема доказательства.

(0) Модель TFDA является векторным пространством над $\mathbf{Q}$.

Док.: Рассмотрим такую модель M. Сначала для всех $x \in M$ и натуральных $n > 0$ определим x/n как такое y, что $n \cdot y = x$. Такое y существует по аксиоме (D) и единственно по аксиоме (TF) и свойству абелевых групп $n(y - z) = ny - nz$ (которое доказывается для каждого n — индукцией по n). Очевидно, что $x/1 = x$

Теперь можно определить $(m/n) \cdot x := m \cdot (x/n)$ и $(-m/n) \cdot x := -((m/n) \cdot x)$ для всех натуральных $m, n > 0$. Таким образом, в M получаем умножение на рациональные числа, для которого проверяются свойства векторного пространства:

1. $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$.

2. $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$.

3. $(rs) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$.

Обозначим это пространство через $V(M)$.

(1) Теорема Хамеля: всякое векторное пространство имеет базис.

Док.: Базис — это максимальное линейно независимое подмножество. Оно существует по лемме Цорна.

(2) Если базис пространства V (над $\mathbf{Q}$) бесконечной мощности k, то и V — мощности k.

Док.: Действительно, каждый вектор из V записывается в виде конечной линейной комбинации элементов базиса (который мы обозначим через B). Линейно упорядочим B; это можно сделать по теореме Цермело, и запишем каждый вектор $v \in V$ как $\sum_{i=1}^{m} r_i \cdot b_i$ (для некоторого

m), где все $r_i \neq 0$, все $b_i \in B$ и $b_1 < \ldots < b_m$ относительно выбранного порядка на B. Полагая $h(v) := ((r_1, b_1), \ldots, (r_m, b_m))$, получаем инъективное отображение h из V в множество конечных последовательностей, составленных из элементов множества $(\mathbf{Q} \times B)$, т.е. в счетное объединение

$$\{0\} \cup (\mathbf{Q} \times B) \cup (\mathbf{Q} \times B)^2 \cup \ldots$$

По свойствам мощностей имеем: $|\mathbf{Q} \times B| = |(\mathbf{Q} \times B)^2| = \ldots = k$, а счетное объединение множеств мощности k имеет ту же мощность. Значит, $|V| \leq k = |B| \leq |V|$, откуда $|V| = k$.

Таким образом, все бесконечные базисы равномощны (для конечных - это известно из алгебры), и можно корректно определить размерность $dimV$. При этом для бесконечномерного V имеем: $dimV = |V|$.

(4) Векторные пространства одинаковой размерности изоморфны. Это стандартный факт из алгебры: вектор переводим в вектор другого пространства с теми же координатами.

Теперь можно доказать категоричность. Пусть даны модели M, M' несчетной мощности k. Тогда $V(M)$, $V(M')$ бесконечномерны, так как конечномерное пространство над $\mathbf{Q}$ всегда счетно. В силу (3) $dimV(M) = dimV(M') = k$. В силу (4), $V(M_1) \cong V(M_2)$. Но тогда и $M_1 \cong M_2$ — годится тот же изоморфизм.