

Листок 14. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

АНАЛИЗ, 1 КУРС, 24.05.2016

- 14◊1 Напишите уравнения касательной плоскости к поверхности уровня дифференцируемой функции $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ в точке (x_0, y_0, z_0) и докажите, что эта плоскость ортогональна градиенту ∇F в этой точке.
- 14◊2 Пусть $f(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция в линейно связной области G , пусть $f'_y = 0$ на G . Верно ли, что G не зависит от y в области G ?
- 14◊3 Дом можно строить, если угол наклона почвы не превышает 30 градусов, иначе он сползет. Опишите область, где можно строить дом
- а) на горе, описываемой графиком функции $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$;
б) на перевале, описываемой графиком функции $f(x, y) = 1 + x^2 - y^2$.
- 14◊4 Пусть $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$, $z = uv$.
Найти производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
- 14◊5 Найти условия существования обратного отображения $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$, к отображению, задаваемому равенствами $x = uv \cos w$, $y = uv \sin w$, $z = u + v + w$ и вычислить производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$.
- 14◊6 Найти частную производную $\frac{\partial f^{21}}{\partial x^9 \partial y^{12}}$ функции $\frac{x + y}{1 - x^2 y^3}$ в начале координат.
- 14◊7 Найдите все точки экстремума функции $f(x, y) = 3x^2 y - x^3 - y^4$ на плоскости.
- 14◊8 Докажите, что уравнение $x = x^3 + 0.001$ имеет корень вблизи нуля, и найдите его первые 10 знаков.
- 14◊9 Приведите пример отображения $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющего $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ и не имеющего неподвижных точек.
- 14◊10 Пусть отображение T преобразует метрический компакт X в себя, причём $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$. Доказать, что T имеет в X единственную неподвижную точку.
- 14◊11 Пусть монотонно возрастающая функция f преобразует отрезок $[0, 1]$ в себя.
- а) Докажите, что у f есть по крайней мере одна неподвижная точка.
б) Докажите, что по крайней мере в одной из таких точек функция f непрерывна.
- 14◊12 Пусть $1 < \lambda < 3$ и $f(x) = \lambda x(1 - x)$. Докажите, что для всякой точки $x_0 \in (0, 1)$ последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ сходится к неподвижной точке отображения $x \mapsto f(x)$.