

Дискретная математика и приложения

Листок 3

ВШЭ, факультет математики, первый курс

1. Пусть G – граф на $n \geq 3$ вершинах без кратных рёбер и петель. Если сумма степеней любых двух несмежных вершин G не меньше n , то в G есть гамильтонов цикл, то есть цикл, проходящий через каждую вершину ровно по одному разу.
2. Пусть X и Y – случайные величины. Правда ли, что для произвольного ненулевого многочлена F случайные величины $F(X)$ и $F(Y)$ также независимы?
3. Пусть p_n – вероятность того, что правильную монету придётся ровно n раз кинуть, прежде чем два раза подряд встретится решка. Пусть $q_n = \sum_{k \geq n} p_k$. Найдите замкнутую формулу для p_n и q_n через числа Фибоначчи.
4. Постройте случайную величину, имеющую конечное матожидание и бесконечную дисперсию.
5. Пусть X_1, \dots, X_n – бесконечная последовательность независимых случайных величин с распределением Бернулли с параметром p . Определим случайную величину $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ и положим $Y = \inf\{n \mid S_n = r\} - r$. Вычислите распределение случайной величины Y , её матожидание и дисперсию.
6. n конвертов с разными адресами и вложенными в них письмами рассыпали на полу. Все письма вылетели из конвертов. Случайным образом письма раскладываются по конвертам. Найти вероятность того, что ни одно письмо не попало в свой конверт.
7. Монета подбрасывается бесконечное число раз. Докажите, что любая заданная последовательность длины n встретится с вероятностью 1.
8. Вероятность того, что в справочное бюро в течение часа обратятся k человек равна $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Вероятность для каждого позвонившего, что он не получит ответ на свой вопрос, равна p . Найдите вероятность того, что ровно s обратившихся не получают ответы на свои вопросы.
9. n человек подбрасывают вверх свои шляпы. Каждая из шляп случайным образом падает вниз на голову одного из людей. Найдите матожидание и дисперсию числа шляп, опустившихся на голову своего первоначального хозяина.
10. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа циклов длины l в разложении случайной перестановки на непересекающиеся циклы.