Случайные процессы, случайные матрицы и интегрируемые модели .
Листок 1.

Задача 1. Метод моментов и распределение Пастура-Марченко.

Пусть $X \in \mathbb{R}^{N\times p}$ — прямоугольная матрица, матричные элементы которой есть независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, $\mathbb{E}(X_{ij}=0)$, единичной дисперсией, $\mathbb{D}(X_{ij})=1$ и конечными моментами более высоких степеней, где $N \le p$. Пусть $R_N = N^{-1}XX^T$ - выборочная коварициoнная матрица $N\times N$ с собственными значениями $\lambda_1,\dots,\lambda_N$. Введем эмпирическую спектральную меру

$$L_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\lambda_i}.$$

а) Докажите, что в пределе $N\to\infty, N/p = c \le 1$ моменты эмпирического спектрального распределения стремятся к выражению

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\left(\int x^k dL_N\right) = \sum_{l=1}^{k} c^l \mathcal{N}(k,l),$$

где

$$\mathcal{N}(k,l) = \frac{1}{k}C_k^l C_k^{l-1},$$

числа Нараяны и убедитесь, что они совпадают с моментами распределения Пастура-Марченко, заданного плотностью

$$f(x) = \frac{\sqrt{(a_+-x)(x-a_-)}}{2\pi x}\mathbf{1}_{a_-\le x\le a_+},$$

где $a_\pm = (1\pm\sqrt{c})^2$.
б) При $N=p$, c = 1, моменты становятся равны числам Каталана где C_k, которые дают также четные моменты полукруглого закона Вигнера, а плотность распределения Пастура-Марченко обращается в четверть-круговой закон

$$f_{\text{c}=1}(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\mathbf{1}_{0\le x\le 1}.$$

Воспользуйтесь этим фактом, чтобы найти предельное распределение собственных значений симметричной матрицы $2N\times 2N$ вида

$$\begin{pmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{pmatrix}$$

и объясните его связь с распределением Вигнера.
Указания к пункту (а):

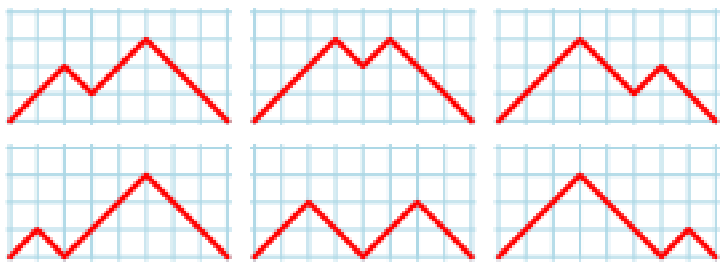
1) Сведите задачу подсчета следов степеней матрицы R_N к задаче о циклах на двудольном графе. (Двудольным называется граф в котором есть два сорта вершин и все ребра соединяют только вершины разных сортов.)

2) Покажите, что циклы, вклад от которых выживает в пределе $N \to \infty$, обходят дерево и им можно сопоставить некоторые пути Дикаю (Или проверьте совпадение чисел таких циклов с числами Нараяны для нескольких первых моментов.)

3) Числа Нараяны дают количество правильных скобочных структур, состоящих из k пар скобок, где l раз встречается конфигурация (), или количество путей Дика из $2k$ шагов с l пиками. Например для $\mathcal{N}(4,2) = 6$ имеем

$$()((())) \quad (())(()) \quad (()(())) \quad ((()())) \quad ((())()) \quad ((()))()$$

и



Очевидно сумма чисел Нараяны дает полное число путей Дика - число Каталана,

$$C_k = \sum_{l=1}^{k} \mathcal{N}(k,l) = \frac{1}{k+1} C_{2k}^{k}$$

Задача 2. Сходимость моментов распределения Вигнера.

Пользуясь неравенством Маркова и первой леммой Бореля-Контелли докажите, что для моментов эмпирического распределения вигнеровских матриц имеет место сходимость почти наверное (Обобщите доказательство намеченное в лекциях).

Задача 3. Метод распределения Стильтьеса и полукруглый закон Вигнера

Пусть $X = X^T \in \mathbb{R}^{N \times N}$ — симметричная матрица , матричные элементы которой выше и на главной диагонали есть независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, $\mathbb{E}(X_{ij} = 0)$, дисперсией, $\mathbb{D}(X_{ij}) = 1/N$. Выведите предельное выражение эмпирической спектральной меры такой матрицы методом преобразования Стильтьеса при $N \to \infty$.

а) Найдите связь между диагональным элементом $(G_N(z))_{ii}$ резольвенты такой матрицы

$$G_N(z) = (X - I_N z)^{-1}$$

и резольвентой $G_{N-1}^{(i)}(z)$ матрицы $X^{(i,i)}$, полученной вычеркиванием $i-$ й строки и $i-$го столбца из матрицы X.

б) Заменяя в полученном выражении $(G_N(z))_{ii}$, $X_{ij} \left(G_{N-1}^{(i)} \right)_{jk} (z) X_{ki}$ и X_{ii} их матожиданиями и предполагая близость преобразований Стильтьеса

$$s_N(z) = \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda_i - z} \right) = \frac{1}{N} \mathrm{Tr} G(z)$$

эмпирического спектрального распределения матриц X и $X^{(i)}$ получите уравнение на $s_N(z)$ в пределе $N \to \infty$.

в) Выберите решение полученного уравнения, которое удовлетворяет свойствам преобразования Стильтьеса, и, обратив его, выведите закон Вигнера.

Задача 4. Свойство максимальной случайности гауссовых ансамблей

Покажите, что распределение $P(H) = Z^{-1} \exp\left[-Tr(H^2)/(2N)\right]$ максимизирует функционал «энтропии»

$$S(P) = -\int p(H) \log P(H) dH$$

при условии $\mathbb{E}(Tr(H^2)/(2N)) = n/2$, где $n = N + \beta N(N-1)/2$ — число степеней свободы.

Задача 5. Минимальный пример гауссовых ансамблей

Найдите прямой диагонализацией распределение собственных значений матриц размера 2×2 из гауссовых ортогонального, унитарного и симплектического ансамбля.

а) Рассморите вещественную симметричную матрицу $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$, с независимыми матричными элементами, $a_{11}, a_{22} \sim \mathcal{N}(0,1), a_{12} = a_{21} \sim \mathcal{N}(0, 1/\sqrt{2})$. Постройте ортогональные преобразования, диагонализующие эти матрицы. От распределения матричных элементов перейдите к новым переменным — собственным значениям и углу поворота, который задает ортогональное преобразование. Проинтегрируйте по углу и найдите распределение собственных значений.

b)* Попробуйте проделать то же самое для эрмитовых и кватернионно-вещественных эрмитовых матриц 2×2 с нормально распределенными матричными элементами, применив для диагонализации унитарные и симплектические матрицы соответственно. В кватернионном случае можно думать о матрицах как о блочных матрицах 2×2 построенных из матриц Паули. Вещественный кватернион в таком представлении имеет вид

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix},$$

где z и w - комплексные числа.

Задача 6. Вырождение Крамера

1. Покажите, что если эрмитова матрица $X = X^+ \in \mathbb{C}^{2N\times2N}$ коммутирует с оператором обращения времени $T = Z_{2N}C$, где $Z = e_2 \otimes I_N$, а C — комплексное сопряжение, то собственные значения X двукратно вырождены

1) Предположим ϕ собственный вектор X с собственным значением λ. Покажите, что $T\phi$ — тоже собтвенный вектор с собственным значением λ.

2) Используя свойство $T^2 = -I_{2N}$, покажите что эти вектора ортогональны.

Задача 7. Круговые Ансамбли

Выведите распределение собственных значений случайных матриц в ортогональном, унитарном и симплектическом круговых ансамблях.

Задача 8.*Ансамбль Вишерта

Пусть $X \in \mathbb{R}^{N\times p}$— вещественная, $\beta = 1$, комплексная, $\beta = 2$ или кватернионно-вещественная, $\beta = 4$, матрица с независимыми нормально распределенными матричными элементами, независимые вещественные компоненты которых имеют дисперсию $1/\beta$, и $N < p$.

1) Покажите, что марица $A = X^{+}X$ распределена по закону

$$P(dA) = C^{-1} e^{-\frac{\beta}{2} Tr(A)} (\det A)^{\beta a/2} \prod_{i\le j} dA_{ij},$$

где $a = p - N + 1 - 2/\beta$.

2) Покажите, что распределение собственных значений матрицы A имеет вид

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = Z^{-1} e^{-\frac{\beta}{2}\sum_{i=1}^{N}\lambda_1} \prod_{i=1}^{N} \lambda_i^{\beta a/2} \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^{\beta}.$$