Дискретная математика и приложения
Семинар 7

ВШЭ, факультет математики
первый курс

1. Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром μ, т.е. $P(X = k) = e^{-\mu}\mu^k/k!$ для всех $k \geq 0$. Чему равны математическое ожидание, дисперсия и старшие моменты X?

2. Допустим, что случайная величина X_1 имеет распределение Пуассона с параметром μ_1, а случайная величина X_2 независима от X_1 и имеет распределение Пуассона с параметром μ_2. Какова вероятность того, что $X_1 + X_2 = n$?

3. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины $2X_1 + 3X_2$ (X_1, X_2 из предыдущей задачи)?

4. Вычислите производящую функцию случайной величины с биномиальным распределением. Найдите её матожидание, дисперсию и старшие моменты.

5. Пусть $F(z)$ и $G(z)$ – производящие функции случайных величин и пусть $H(z) = pF(z) + qG(z)$, где $p + q = 1$. Выразите математическое ожидание и дисперсию H через p, q и математическое ожидание и дисперсию F и G.

6. Ковариацией двух случайных величин X и Y называется $(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY))$. Докажите, что если X, Y независимы, то $(X, Y) = 0$.

7. Приведите пример двух непостоянных случайных величин, таких что их ковариация равна нулю, но они не независимы.

Пусть X – случайная величина на вероятностном пространстве Ω. Определим с.в. X_i на вероятностном пространстве Ω^n (с естественной функцией вероятности – какой?) по формуле $X_i(\omega_1, \ldots, \omega_n) = X(\omega_i)$.

8. Рассмотрим случайные величины $\widehat{EX} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ и

$$\widehat{DX} = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n-1} - \frac{(X_1 + \cdots + X_n)^2}{n(n-1)}.$$

Докажите, что $E(\widehat{EX}) = EX$, $E(\widehat{DX}) = DX$.