

Листок 3 (срок сдачи 15.06.16)

В задачах 2-10 можно использовать тезис Черча.

Обязательные задачи

1. (письменная) Постройте машину Тьюринга, вычисляющую остаток от деления натурального числа на 3. Сначала опишите порядок действий этой машины на русском языке.
2. (a) Докажите, что декартово произведение двух перечислимых подмножеств \mathbb{N} перечислимо.
(b) Докажите, что декартово произведение двух разрешимых подмножеств \mathbb{N} разрешимо.
3. (a) Докажите, что график любой вычислимой функции $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ является перечислимым подмножеством \mathbb{N}^2 .
(b) Докажите, что если график функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ является перечислимым подмножеством \mathbb{N}^2 , то f вычислима.
4. Пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — вычислимая биекция. Докажите, что обратная биекция вычислима.
5. Пусть $A \subset \mathbb{N}$ — бесконечное перечислимое множество. Докажите, что существует вычислимая инъекция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такая что $\text{rng } f = A$.

Дополнительные задачи

6. Пусть $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — вычислимая тотальная строго возрастающая функция, A — разрешимое множество натуральных чисел. Докажите, что множество $f(A)$ разрешимо.
7. Докажите, что график любой вычислимой тотальной функции $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ является разрешимым подмножеством \mathbb{N}^2 .
8. Докажите, что если $A, B \subset \mathbb{N}$ — бесконечные разрешимые множества с бесконечными дополнениями, то существует вычислимая биекция $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, переводящая A в B .
9. Постройте разрешимое множество $B \subset \mathbb{N}^2$, для которого проекция $\text{pr}_1 B = \{x \mid \exists y (x, y) \in B\}$ — неразрешимое множество.
10. Докажите, что если теория первого порядка в конечной сигнатуре не имеет бесконечных моделей, то она разрешима.