

Группы и алгебры Ли II (весенний семестр)

Лекторы: Е.Б.Фейгин, С.М.Хорошкин, М.Э.Казарян

Курс является продолжением курса Г.И.Ольшанского "Группы и алгебры Ли" и будет посвящён комплексным и вещественным полупростым группам Ли, их структуре, представлениям, связанной с ними геометрии и некоторым приложениям. Мы планируем подробно обсудить основные классические комплексные группы Ли, изучить их конечномерные неприводимые представления и их характеры. Мы также обсудим алгебро-геометрические объекты, играющие важнейшую роль: многообразия флагов и однородные пространства. Мы разберём базовый пример многообразий Грассмана, построим проективные вложения грассманианов и выпишем определяющие соотношения. Мы разберем основные понятия и методы вещественных полупростых групп: основную унитарную и неунитарную серию представлений, основные примеры симметрических пространств и сферических функций. Мы также уделим внимание естественно связанным с группами Ли геометрическим объектам (в частности, кокасательному расслоению к группе, двойственному пространству к алгебре Ли и орбитам в нем), в которых берут начало многие интегрируемые системы классической механики.

Предполагаемая программа.

1. Примеры простых комплексных групп и алгебр Ли: классические серии.
2. Представления простых комплексных групп Ли: конечномерные неприводимые, модули Верма. Примеры.
3. Универсальная обёртывающая алгебра: теорема ПБВ, центр.
4. Однородные пространства, многообразия флагов, проективные вложения.
5. Соотношения Плюккера в типе A.
6. Многообразия Шуберта.
7. Линейные расслоения на многообразиях флагов, пространства сечений, когомологии.
8. Многообразия Ботта-Самельсона, разрешения особенностей.
9. Вещественные редуктивные группы. Симметрические пространства.
10. Бесконечномерные представления вещественных групп. Основная неунитарная серия.
11. Унитарные представления. Теорема Планшереля (на примере).
12. Инвариантные дифференциальные операторы. Сферические функции.
13. Двойственное пространство к алгебре Ли. Орбиты. Скобка Кириллова.
14. Интегрируемые системы и группы Ли. Отображение моментов.

Литература.

1. A. Kirillov, Jr., Introduction to Lie Groups and Lie Algebras.
2. У.Фултон, Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии.
3. S.Kumar, Kac-Moody Groups, Their Flag Varieties and Representation Theory.
4. Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления.
5. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с не вопросы теории представлений (Обобщенные функции, вып. 5.)
6. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ.
7. Кнапп А. W. Representation theory of semisimple groups
8. Chriss N., Ginzburg V. Representation theory and complex geometry.