Дискретная математика и приложения
Семинар 8

ВШЭ, факультет математики
первый курс

1. Случайная величина X принимает целые неотрицательные значения и имеет распределение $P(X = k) = \binom{k+1}{k} p^2 q^k$, $k \geq 0$. Для каких p и q определение корректно? Вычислите матожидание и дисперсию X.

Рассмотрим модель случайных графов Эрдеша-Реньи (n – число вершин, p – вероятность появления каждого из рёбер).

2. Для данных n и p найдите матожидание количества
(a) изолированных вершин;
(b) треугольников;
(c) k–клик (полных подграфов на k вершинах);
(d) k–клик, являющихся компонентами связности;
(e) гамильтоновых циклов;
(f) деревьев с k вершинами;
(g) древесных компонент данного размера k, т.е. деревьев с k вершинами, являющихся компонентами связности.

3. Для данных n и p найдите дисперсию количества (a) изолированных вершин; (b) треугольников.

4. Докажите, что при $p(n) = 1/(2n)$ почти наверное имеется более $n/2$ изолированных вершин.

5. Для данных n и p вероятность наличия k вершин, между которыми нет рёбер, меньше $e^{k \ln n - pk(k-1)/2}$.

6. Если в графе $G = (V, E)$ с n вершинами минимальная степень вершины равна δ, то для любого $0 < p < 1$ существует такое множество вершин $A \subset V$, что в объединении A и множества всех вершин, не соединённых ни с какой вершиной из A, имеется не более $np + n(1-p)^{\delta+1}$ вершин.