Алгебраическая теория D-модулей

лекторы: *Вадим Вологодский и Антон Хорошкин*

Легко видеть, что если $\phi(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - гладкая функция с компактным носителем, то интеграл

$$I_\phi(s) = \int_0^\infty x^s \phi(x) dx$$

сходится при любом комлексном s, при условии $Re\, s > -1$. Однако, утверждается, что $I_\phi(s)$ продолжается до мероморфной плоскости на всей комлексной плоскости. Для того, чтобы это увидеть достаточно воспользоваться соотношением

$$x^{s-1} = \frac{1}{s}\frac{d}{dx}(x^s) \tag{0.1}$$

и формулой интегрирования по частям. Получается соотношение

$$I_\phi(s-1) = -\frac{1}{s} I_{\phi'}(s),$$

из которого следует существование указанного мероморфного продолжения. Более того, из этой же формулы следует что полюса функции $I_\phi(s)$ могут быть только в точках $s = -1, -2, -3 \cdots$ (для достаточно общей функции ϕ в этих точках действительно имеются простые полюса).

Оказывается, у этого факта имеется обобщение: для любого полинома $P(x) = P(x_1, x_2, \cdots x_n)$ и гладкой функции $\phi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с компактным носителем, функция

$$I_\phi(s) = \int_{\mathbb{R}^n} |P(x)|^s \phi(x) dx$$

допускает мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость с полюсами в конечном числе арифметических прогресий вида $-a, -a-1, -a-2, \cdots$, $Re(a) > 0$. Вопрос о существовании такого продолжения, был поставлен И.М. Гельфандом в 1963 году. А первое доказательство, основанное на теореме Хиронаки о разрешении особенностей, получено И.Н. Бернштейном и С.И. Гельфандом в 1969 году (и, независимо, чуть позже, М. Атиа). А несколькольками годами позже И.Н. Бернштейн придумал простое доказательство основанное на формуле интегрирования по частям и такой алгебраической лемме, обобщающей соотношение (0.1)

Лемма Бернштейна: Для любого многочлена $P(\overrightarrow{x}) \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ существует дифференциальный оператор

$$D = \sum a_{i_1,\cdots i_n}(\overrightarrow{x}, s) \frac{\partial^{i_1}}{\partial x_1^{i_1}} \cdots \frac{\partial^{i_n}}{\partial x_1^{i_n}}, \text{ где } a_{i_1,\cdots i_n}(x,s) \in \mathbb{C}(s)[x_1, x_2, \cdots x_n],$$

такой что

$$P(x)^{s-1} = D(P(x)^s).$$

В самом начале курса мы докажем несколько свойств D-модулей на аффинном пространстве, т.е. модулей над кольцом $D(\mathbb{A}^n)$ дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами на $\mathbb{C}^n$, (главное из которых, "неравенство Бернштейна" утверждает, что такой модуль не может быть слишком маленьким, например, конечно-мерным над $\mathbb{C}$) и выведем из них Лемму Бернштейна. В дальнейшем, мы обобщим неравенство Бернштейна на D-модули на любом гладком алгебраическом многообразии. Кольцо $D(X)$ дифференциальных операторов на (аффинном) многообразии X допускает фильтрацию по степени; ассоциированное градуированное кольцо канонически отождествляется с кольцом функций на тотальном пространстве кокасательного расслоения T^*_X к X. Используя это наблюдение, каждому конечно-порожденному D-модулю M на X можно сопоставить замкнутое подмногообразие $s.s(M) \subset T^*_X$, так называемый сингулярный носитель M. Неравенство Бернштейна утверждает, что размерность сингулярного носителя не может быть меньше размерности X. Те D-модули, для которых размерность сингулярного носителя равна размерности X называются голономными; важный пример голономного D-модуля - пространство сечений расслоения с плоской связностью над X. Категория расслоений с плоской связностью тесно связана с категорией представлений фундаментальной группы X (соответствие Римана-Гильберта). Мы обсудим обобщение этого наблюдения на более общий класс D-модулей. Это приведет нас к понятию извращенного пучка.

Курс рассчитан на студетов 2-4 курса, знакомых с основами алгебраической геометрии.

Список литературы

[B] J. Bernstein, *Algebraic theory of D-modules*, лекции прочитанные в городе Беркли. Записки: $http://www.math.columbia.edu/\sim khovanov/resources/Bernstein-dmod.pdf$

[E] P. Etingof, *Algebraic D-modules*, курс прочитанный в MIT в 2013 году. Записки на странице автора: $http://www-math.mit.edu/\sim etingof/$

[G] V. Ginzburg, *Lectures on D-modules,* курс прочитанный в Чикагском университете в 1998 году. Записки: $http://www.math.harvard.edu/\sim gaitsgde/grad\_2009/Ginzburg.pdf$