КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

С.М. Натанзон

Contents

1. Голоморфные функции.

1.1. **Комплексная производная.** Далее под *областью* мы понимаем открытое связное подмножество. Соответствие $(x, y) \leftrightarrow z = x + iy$ между вещественной плоскостью $\mathbb{R}^2$ и комплексной плоскостью $\mathbb{C}$ позволяет рассматривать комплексно-значную функцию комплексного переменного как:

- отображение области комплексной плоскости $D \subset \mathbb{C}$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$ (обозначение $w = f(z)$).
- отображение области вещественной плоскости $D \subset \mathbb{R}^2$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$ (обозначение $w = f(x, y)$).
- отображение области вещественной плоскости $D \subset \mathbb{R}^2$ в вещественную плоскость $\mathbb{R}^2$ (обозначение $(u, v) = f(x, y)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$).

Далее мы будем часто переходить от одной интерпретации к другой.

Определение 1.1. *Пусть f — отображение области комплексной плоскости $D \subset \mathbb{C}$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$ и $z_0 \in D$. Если предел $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ существует и конечен, то говорят, что $f'(z_0)$ есть комплексная производная f в точке z_0.*

Рассмотрим теперь f как отображение области вещественной плоскости в вещественную плоскость. Тогда частная производная f по любому направлению будет также совпадать с $f'(z_0) = f'(x_0, y_0)$. Таким образом,

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x_0+\Delta x, y_0)+iv(x_0+\Delta x, y_0))-(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0),$$
$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x_0, y_0+\Delta y)+iv(x_0, y_0+\Delta y))-(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))}{i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0).$$

Равенство этих строк влечет

Лемма 1.1. *Если f имеет комплексную производную в z_0, то в этой точке выполнены*

$$\boxed{\text{Условия Коши-Римана (Cauchy-Riemann): } \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0); \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0).}$$

Введем теперь важные обозначения.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}); \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})}$$

Другими словами,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial(u+iv)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + i\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(-i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(u+iv)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Таким образом,

Лемма 1.2. *Если функция f имеет комплексную производную в точке z_0, то $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ и $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.*

1.2. **Дифференциал комплексной функции.**

Лемма 1.3. *Если функция $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ имеет комплексную производную в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то соответствующее отображение $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ дифференцируемо в точке (x_0, y_0) как отображение области вещественной плоскости в $\mathbb{R}^2$.*

Proof. Положим
$$\alpha(\Delta z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0).$$
Тогда $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha(\Delta z)\Delta z = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right) + \alpha(\Delta z)\Delta z$

Следовательно, $(u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y), v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)) - (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(|\Delta z|)$. □

Теорема 1.1. *Функция $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ имеет комплексную производную в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, если и только если соответствующее отображение $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ дифференцируемо и удовлетворяет условиям Коши-Римана.*

Proof. Пусть отображение $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ дифференцируемо в точке (x_0, y_0). Тогда $u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + o(|\Delta z|)$ и $v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)) - v(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + o(|\Delta z|)$

Поэтому для $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ имеем
$$\begin{aligned}
f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + o(|\Delta z|) = \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv)\right](\Delta x + i\Delta y) + \\
&+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv)\right](\Delta x - i\Delta y) + o(|\Delta z|) = \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\Delta x - i\Delta y) + o(|\Delta z|).
\end{aligned}$$
Если отображение f удовлетворяет условиям Коши–Римана, то согласно вычислениям предыдущего раздела $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, и, следовательно,
$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(|\Delta z|),$$
то есть функция f имеет комплексную производную в z_0.

Обратное утверждение следует из лемм 1.1 и 1.3. □

Теорема 1.2. *Пусть функции $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f,g} \mathbb{C}$ имеют комплексные производные в точке z_0. Тогда функции $f \pm g, f \cdot g$ и $\frac{f}{g}$ (если $g(z_0) \neq 0$) имеют комплексные производные в точке z_0, причем $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$, $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$, $(\frac{f}{g})'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$.*

Теорема 1.3. *Пусть $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{C}$, $V \subset \mathbb{C}$, причем функция f имеет комплексную производную в точке z_0, а g — в точке $f(z_0)$. Тогда функция $\phi(z) = g(f(z))$ имеет комплексную производную в z_0 и $\phi'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.*

Задача 1.1. *Доказать теоремы 1.2 и 1.3. Эти доказательства дословно повторяют доказательства соответствующих теорем вещественного анализа.*

1.3. **Голоморфность.**

Определение 1.2. *Говорят, что функция* $D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ *голоморфна в области* $D \subset \mathbb{C}$, *если она имеет комплексную производную в каждой точке* $z \in D$. *Говорят, что функция* f *голоморфна в точке* z_0, *если она голоморфна в некоторой окрестности* $V \ni z_0$ *точки* z_0.

Примеры голоморфных функций:
1. $f(z) = const$, $f'(z) = 0$.
2. $f(z) = az$, где $a \neq 0$. Если $a = re^{i\phi}$, то f поворачивает плоскость $\mathbb{C}$ на угол ϕ вокруг точки 0 и растягивает плоскость в r раз.
3. $f(z) = z^n$. Функция f увеличивает угол между лучами, выходящими из точки 0, в n раз.

Задача 1.2. *Если* $f'(z) = 0$ *на всей на области* $D \subset \mathbb{C}$, *то* $f = const$ *на* D.

Если $f'(z_0) \neq 0$, то в малой окрестности точки z_0 функция f действует почти так, как в примере 2, то есть

Задача 1.3. *Пусть* $f'(z_0) \neq 0$. *Доказать, что функция* f *сохраняет величину угла между кривыми, пересекающимися в* z_0.

Определение 1.3. *Отображения, сохраняющие величину угла, называются конформными.*

Как и в вещественном случае, можно рассматривать последовательности и ряды комплексных функций $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$. Все определения и теоремы дословно переносятся на комплексный случай, если вместо интервала $\{x \in \mathbb{R} | |x - x_0| < r\}$ рассматривать диск $\{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < r\}$.

Задача 1.4. *Доказать, что если ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n'(z)$ *сходится равномерно в области* $D \subset \mathbb{C}$, *а ряд* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)$ *сходится хотя бы в одной точке области, то ряд* $f(z)$ *сходится равномерно в области* D *и* $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(z)$.

Нас будут интересовать в основном степенные ряды $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, $c_n \in \mathbb{C}$.

Задача 1.5. *Пусть* $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. *Тогда степенной ряд* $f(z)$ *абсолютно сходится на* $D = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < R\}$ *и расходится на* $D = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| > R\}$. *На любом компакте* $K \subset D$ *ряд* $f(z)$ *сходится равномерно.*

Положим:

$$e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Задача 1.6. *Доказать, что функции* $e^z, \cos z, \sin z$ *существуют и голоморфны на всей плоскости* $\mathbb{C}$. *Найти для каждой из функций область* D *такую, что* $f(D) = \mathbb{C}$.

1.4. **Комплексное интегрирование.** Под *кривой* (или *путем*) мы будем понимать ориентированный образ кусочно-гладкого отображения отрезка $[\alpha, \beta]$ в плоскость $\mathbb{C}$. Замкнутая кривая называется *контуром.* В вещественном случае интеграл по кривой — это предел при $\max \Delta z_k \to 0$ интегральных сумм $S = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$, где ξ_k — точки, разбивающие кривую γ, а Δz_k — отрезки, соединяющие эти точки. Если формально считать аргумент и функцию комплексным числом, то получится комплексный интеграл по кривой $\gamma \subset \mathbb{C}$. При этом

$$S = \sum_{k=0}^{n} \big(u(\xi_k) + iv(\xi_k)\big)(\Delta x + i\Delta y) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \big(u(\xi_k)\Delta x_k - v(\xi_k)\Delta y_k\big) + i\big(u(\xi_k)\Delta y_k + v(\xi_k)\Delta x_k\big).$$

Таким образом, мы приходим к следующему определению

Определение 1.4. *Интегралом функции* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *по кривой* $\gamma \subset \mathbb{C}$ *называется комплексное число*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \stackrel{def}{=} \int_\gamma (udx - vdy) + i \int_\gamma (udy + vdx).$$

Если $w : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ — гладкая параметризация кривой γ и $w(t) = x(t) + iy(t)$, то

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta \big(u(w(t))x'(t)dt - v(w(t))y'(t)dt\big) +$$
$$+ i \int_\alpha^\beta \big(u(w(t))y'(t)dt + v(w(t))x'(t)dt\big) = \int_\alpha^\beta f(w(t))w'(t)dt.$$

В частности, правая часть не зависит от параметризации $w(t)$.

Пример 1.1. *Пусть* $\gamma = \{z \in \mathbb{C} | |z - a| = r\} = \{a + re^{it} | t \in [0, 2\pi]\}$. *Тогда*

$$\int_\gamma (z - a)^n dz = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

Пример 1.2. *Пусть* $n \neq -1$ *и* $\gamma \subset \mathbb{C}$ *— путь из* a *в* b. *Рассмотрим его параметризацию* $w = w(t)$. *Тогда*

$$\int_\gamma z^n dz = \int_\alpha^\beta w^n(t)w'(t)dt = \frac{1}{n+1} \int_\alpha^\beta \left(\frac{d}{dt}(w^{n+1}(t))\right) dt =$$
$$= \frac{1}{n+1}(w^{n+1}(\beta) - w^{n+1}(\alpha)) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Через $\int_\gamma |f||dz|$ будет обозначаться интеграл по длине дуги $\int_\alpha^\beta |f||z'(t)|dt$.

Из определения очевидна

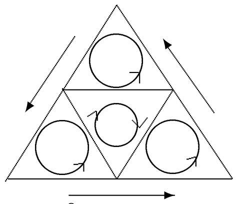
Теорема 1.4. *При изменении ориентации кривой* γ *интеграл меняет знак.*

$$\int_\gamma (af + bg)\,dz = a \int_\gamma f\,dz + b \int_\gamma g\,dz, \quad \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz,$$

$|\int_\gamma f\,dz| \leq \int_\gamma |f|\,|dz|$. *В частности, если* $|f(z)| \leq M$, *то* $|\int_\gamma f\,dz| \leq M|\gamma|$, *где* $|\gamma|$ *— длина дуги.*

1.5. **Теорема Коши.**

Лемма 1.4. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D. Тогда для любого треугольника $\Delta \subset D$ $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.*

Proof. 

Пусть $|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz| = M > 0$. Разобьём Δ на 4 треугольника a_1, a_2, a_3, a_4 так, как это показано на рисунке. Тогда $M = |\sum_{i=1}^n \int_{\partial a_i} f(z)\,dz| \le \sum_{i=1}^n |\int_{\partial a_i} f(z)\,dz|$. Значит, для одного из треугольников $\Delta_1 \in \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ выполнено неравенство $|\int_{\partial\Delta_1} f\,dz| \ge \frac{1}{4}M$. Продолжая, находим последовательность треугольников $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$ таких, что $|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz| \ge \frac{1}{4^n}M$.

Пусть $z_0 \in \bigcap \Delta_i \subset D$. Положим $\alpha(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое что $|a(z)| < \varepsilon$ при $0 < |z - z_o| < \delta$. Пусть $\Delta_n \subset \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < \delta\}$, тогда согласно примеру 1.1:

$$\left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z_0)\,dz + \int_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z-z_0)\,dz + \int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z-z_0)\,dz \right| =$$
$$= \left| \int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z-z_0)\,dz \right| \le \int_{\partial\Delta_n} |\,\alpha(z)|\,|\,z-z_0|\,|\,dz| \le \varepsilon\,|\,\partial\Delta_n|^2 =$$
$$= \varepsilon \left(\frac{|\,\partial\Delta|}{2^n} \right)^2 = \varepsilon \frac{|\,\partial\Delta|^2}{4^n}.$$

Таким образом, $\frac{1}{4^n}M \le \left| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \right| \le \varepsilon \frac{|\partial\Delta|^2}{4^n}$ откуда $M \le \varepsilon\,|\partial\Delta|^2$ и, следовательно, $M = 0$. □

Теорема 1.5 (Коши)**.** *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D и $\gamma \subset D$ — замкнутый путь, гомотопный нулю. Тогда $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

Proof. Контур γ ограничивает область Q. Если γ — ломаная, состоящая из отрезков, то область Q может быть разбита на конечное число треугольников $\Delta_i \subset D$. Согласно лемме 1.4, $\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^n \int_{\Delta_i} f(z)\,dz = 0$. Интеграл по произвольному пути является пределом интегралов по ломаным. □

Замечание 1.1. *Для функций f с непрерывной производной $f'(z)$ теорему Коши можно доказывать, используя формулу Грина.*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\partial Q} (udx - vdy) + i \int_{\partial Q} (udy + vdx) =$$
$$= \iint\limits_Q \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint\limits_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

Такое доказательство не подходит однако для последовательного изложения комплексного анализа. Дело в том, что теорема Коши используется в дальнейшем для доказательства непрерывности производной любой голоморфной функции.

Теорема 1.6. *Пусть функция f голоморфна в области D и $G \subset D$ — компакт, ограниченный конечным числом замкнутых контуров. Тогда* $\int_{\partial G} f(z)\,dz = 0$.

Proof. Соединим граничные компоненты множества G отрезками $\delta_1, \ldots, \delta_m \subset G$ таким образом, чтобы множество $\widetilde{G} = G \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \delta_i$ стало односвязным (см.рисунок). Тогда согласно теореме 1.5

$$0 = \int_{\partial \widetilde{G}} f(z)dz = \int_{\partial G} f(z)dz.$$

□

1.6. **Первообразная.**

Определение 1.5. *Первообразной для функции $f(z)$ в области D называется голоморфная в D функция $F(z)$ такая, что $F'(z) = f(z)$.*

Задача 1.7. *Пусть F — первообразная для f. Доказать, что Φ — первообразная для f, если и только если $\Phi = F + const$.*

Лемма 1.5. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $D = \{z \in \mathbb{C} | |z-a| < r\}$. Тогда $F(z) = \int_{[a,z]} f(w)\,dw$ — первообразная для f в D.*

Proof. Пусть $z + h \in D$. Тогда, согласно лемме 1.4 и примеру 1.2:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[a,z+h]} f(w)\,dw - \int_{[a,z]} f(w)\,dw = \int_{[z,z+h]} f(w)\,dw =$$

$$= \int_{[z,z+h]} f(z)\,dw + \int_{[z,z+h]} \big(f(w) - f(z)\big)\,dw = f(z)h + \int_{[z,z+h]} (f(w) - f(z))\,dw.$$

Таким образом,

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{[z,z+h]} |\alpha(h)|\,|dh|,$$

где $\alpha(h) = f(z+h) - f(z)$. Ввиду непрерывности f для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое что $|\alpha(h)| < \varepsilon$ при $|h| < \delta$. Таким образом, $\left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|h|}\varepsilon |h| = \varepsilon$ при $|h| < \delta$, то есть $F'(z) = f(z)$. □

Определение 1.6. *Пусть функция f голоморфна в области D. Первообразной f вдоль кривой $\gamma \subset D$ называется непрерывная функция $\Phi(z)$ на γ, являющаяся ограничением функции, первообразной к f в некоторой области $U \subset D$, содержащей γ.*

Теорема 1.7. *Пусть f голоморфна в области D и $\gamma \subset D$ — кривая без самопересечений с началом a и концом b. Тогда f имеет первообразную $\Phi(z)$ вдоль γ, причем $\Phi(b) - \Phi(a) = \int_\gamma f(z)\,dz$.*

Proof. Кривая γ является образом отрезка $[0,1]$ под действием непрерывной функции $z : [0,1] \to D$. Ввиду равномерной непрерывности функции z отрезок $[0,1]$ можно покрыть интервалами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ так, чтобы образ $z(\alpha_i)$ содержался в круге $D_i \subset D$, и $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, если и только если $|i - j| = 1$. Используя лемму 1.5, выберем на каждом диске D_i первообразную $\tilde{\Phi}_i(z)$. Согласно утверждению из задачи 1.7, эти первообразные можно выбрать таким образом, чтобы они совпадали на всех пересечениях дисков. Тогда на объединении дисков U возникнет нужная первообразная Φ. Равенство $\Phi(b) - \Phi(a) = \int_\gamma f(z)\,dz$ следует из явной конструкции первообразной, использованной в лемме 1.5. □

Теорема 1.8. *Функция f, голоморфная в связной односвязной области D, имеет в этой области первообразную F, причем $\int_\gamma f(z)\,dz = F(b) - F(a)$ для любого пути $\gamma \subset D$ с началом a и концом в b.*

Proof. Пусть $a \in D$. Для $z \in D$ положим $F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,dw$, где путь $\gamma_z \subset D$ соединяет a и z. Согласно теореме 1.5, определение не зависит от γ и, следовательно, корректно. Согласно лемме 1.5 и теореме 1.7 $F'(z) = f(z)$ и $\int_\gamma f(z)\,dz = F(b) - F(a)$. □

1.7. **Интегральная формула Коши.**

Теорема 1.9 (о среднем). *Пусть функция f голоморфна в области D и $G = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| \le r\} \subset D$. Тогда*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt.$$

Proof. Ввиду непрерывности функции f для любого $\varepsilon > 0$ существует $r > \rho > 0$ такое что $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ при $|z - z_0| \le \rho$. Положим $G_\rho = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| \le \rho\}$. Согласно теореме 1.6: $0 = \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z-z_0} dz - \int_{\partial G_\rho} \frac{f(z)}{z-z_0} d$. Поэтому, согласно примеру 1.1,

$$\begin{aligned} f(z_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= f(z_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \\ &= f(z_0)\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_\rho} \frac{dz}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left| f(z_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\partial G_\rho} \frac{\varepsilon}{\rho} |dz| = \varepsilon$$

и

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Подставляя $z = z_0 + re^{it}$, находим, что

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} \cdot (z_0 + re^{it})' dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt. \quad \square$$

Теорема 1.10 (Формула Коши). *Пусть функция f голоморфна в области D и $G \subset D$ — компакт, ограниченный конечным числом контуров. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0), & \text{если } z_0 \in G \setminus \partial G, \\ 0, & \text{если } z_0 \notin G. \end{cases}$$

Proof. Если $z_0 \notin G$, то утверждение следует из теоремы 1.6. Если $z_0 \in G \setminus \partial G$, то рассмотрим $U = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| \le r\} \subset G \setminus \partial G$. Тогда по теоремам 1.9 и 1.6:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial (G\setminus U)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad \square$$

1.8. **Разложение в ряд Тейлора.**

Теорема 1.11. *Пусть функция f голоморфна в области D и $G = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < R\} \subset D$. Тогда функция f совпадает на G с суммой ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$ и $\gamma = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| = r < R\}$.*

Proof. Согласно теореме 1.6, c_n не зависит от выбора $r < R$. Пусть $z \in G$ и $|z - z_0| < r$. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}.$$

Если $w \in \gamma$, то

$$\left|\frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}\right| = \frac{1}{|z - z_0|}\left(\left|\frac{z - z_0}{w - z_0}\right|\right)^{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{|z - z_0|},$$

где $\rho = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$. Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ мажорируется абсолютно сходящимся рядом и, следовательно, сходится равномерно по w на γ. Функция $f(w)$ ограничена на γ, и, следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ также сходится равномерно по w на γ. В частности, его можно почленно проинтегрировать, что по формуле Коши дает

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f(w)\frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \int_\gamma \frac{f(w)}{2\pi i}\frac{dw}{(w - z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad \square$$

Теорема 1.12. *Пусть $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < \infty$. Тогда функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ существует и голоморфна в круге $D = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < R\}$, причем функция $f'(z)$ также голоморфна в D.*

Proof. Положим $\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$. Ввиду

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R},$$

функция $\phi(z)$ определена на D и равномерно сходится на компактах в D. Значит, $\phi(z)$ можно почленно интегрировать по путям в D. Положим

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} \phi(w)dw = \int_{[z_0,z]} \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(w-z_0)^{n-1}dw =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n \int_{[z,z_0]} (w-z_0)^{n-1}dw = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n \frac{1}{n}(w-z_0)^n|_{w=z_0}^{w=z} = f(z) - c_0.$$

С другой стороны:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} \phi(w)\, dw = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n \int_{[z,z+h]} (w-z_0)^{n-1}dw =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(w-z_0)^n|_z^{z+h} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[(z+h-z_0)^n - (z-z_0)^n\right] = h\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1} + h^2 g(z).$$

Таким образом,

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1} = \phi(z).$$

Мы доказали, что $f'(z)$ существует и представляется рядом с теми же свойствами, что и $f(z)$. Следовательно, $f^{(2)}(z)$ тоже существует, то есть $f'(z)$ — голоморфна в D. □

1.9. **Критерий голоморфности.**

Теорема 1.13. *Пусть функция f голоморфна в области D. Тогда она имеет там комплексные производные всех порядков, они голоморфны и*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad , \text{ где } U = \{w \in \mathbb{C} | |w-z| \le r\} \subset D$$

Proof. Пусть $z_0 \in D$ и $G = \{z \in \mathbb{C} | |z-z_0| \le R\} \subset D$. Согласно теореме 1.11, функция $f(z)$ представляется на G в виде ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. Поэтому согласно теореме 1.12, функция $f'(z)$ голоморфна на $G \setminus \partial G$. Повторяя рассуждение, доказываем голоморфность $f^{(n)}(z)$ при всех n. Повторяя рассуждение вещественного анализа, находим почленным дифференцированием, что $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. Сопоставив с теоремой 1.11, получим формулы для $f^{(n)}(z)$. □

Теорема 1.14. *Пусть $U = \{z \in \mathbb{C} | |z-a| < r\}$ и $f : U \to \mathbb{C}$. Тогда следующие 3 условия эквивалентны:*

(1) *функция f голоморфна в U, то есть имеет комплексную производную в каждой точке U.*
(2) *функция f непрерывна в U и интеграл по границе любого треугольника $\Delta \subset U$ равен 0.*
(3) *$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ на U.*

Proof. (1)⇒(2) — это теорема 1.5, (1)⇒(3) — это теорема 1.11, (3)⇒(1) — это теорема 1.12. Докажем

(2)⇒(1) (Теорема Морера). Положим $F(z) = \int_{[a,z]} f(w)\,dw$. Тогда $F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)\,dw$ и

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,z+h]} f(w)\,dw - hf(z)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,z+h]} (f(w)-f(z))dw\right| \le \frac{1}{|h|}\max_{[z,z+h]}|f(w)-f(z)|\cdot|h| = \max_{[z,z+h]}|f(w)-f(z)|.$$

Поэтому непрерывность функции f в точке z влечет дифференцируемость функции F в точке z и равенство $F'(z) = f(z)$. Таким образом, функция $F(z)$ — голоморфна на U. Согласно теореме 1.13, отсюда следует голоморфность функции $f(z)$. □

Таким образом, в отличие от гладких функций вещественного переменного, голоморфные функции определяются счетным множеством чисел. Эти числа определяются поведением функции в окрестности точки и, следовательно, поведение функции в окрестности точки определяет всю функцию. Более того, эти числа можно найти интегрированием по контуру, что иногда удобней, чем дифференцирование.

1.10. **Теорема Вейерштрасса.**

Теорема 1.15 (Вейерштрасс). *Пусть функции $\{f_n(z)\}$ голоморфны в области D и ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ равномерно сходится на любом компакте, лежащем в D. Тогда функция f голоморфна и $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z)$.*

Proof. Для произвольной точки $a \in D$ рассмотрим замкнутый диск $U = \{z \in \mathbb{C} | |z-a| \le R\} \subset D$. Если $\gamma \subset U$ — граница треугольника, то ввиду равномерной сходимости: $\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\,dz$ и, согласно теореме 1.14, $f(z)$ — голоморфна на U. Кроме того, согласно теореме 1.13,

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(z)}{(z-a)^2}dz =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f_n(z)}{(z-a)^2}dz = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(a).$$

□

Таким образом, в отличие от гладких функций вещественного переменного, множество голоморфных функций замкнуто относительно равномерного предела.

2. Мероморфные функции.

2.1. **Функции голоморфные в кольце. Ряды Лорана.** Перейдем теперь к изучению свойств функций, голоморфных в неодносвязных областях.

Теорема 2.1. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в кольце $V = \{0 \le r < |z-a| < R \le \infty\}$. Тогда на V*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$$

и

$$\gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C} | |z-a| = \rho\} \subset V.$$

Proof. Пусть $z \in V$ и $U = \{w \in V | \alpha \leq |w-a| \leq \beta\} \ni z$. По формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(w)}{(w-z)}dw = f_\beta(z) - f_\alpha(z),$$

где

$$f_\beta(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\beta} \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\beta} f(w)\frac{1}{(w-a)\left(1-\frac{z-a}{w-a}\right)}dw =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\beta} f(w)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}dw = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

$$f_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\alpha} \frac{f(w)}{w-z}dw = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\alpha} \frac{f(w)}{(z-a)\left(1-\frac{w-a}{z-a}\right)}dw =$$
$$= -\int_{\gamma_\alpha}\frac{f(w)}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}dw =$$
$$= -\int_{\gamma_\alpha}\frac{f(w)}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^{-(n+1)}}{(w-a)^{-n}}dw = -\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}. \quad \square$$

Определение 2.1. *Ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ называется рядом Лорана с правильной частью $\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ и главной частью $\sigma_2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$.*

Теорема 2.2. *Ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ задает функцию, голоморфную в кольце $V = \{z \in \mathbb{C} | r < |z-a| < R\}$, где $r = \overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_{-n}|}$ и $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$.*

Proof. По теореме Абеля функция σ_1 и функция σ_2 сходятся равномерно на любом компакте в V. Поэтому по теореме Вейерштрасса функции σ_1 и σ_2 голоморфны в кольце V. $\square$

Теорема 2.3 (Неравенство Коши). *Пусть функция $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ голоморфна в кольце $V = \{z | r < |z-a| < R\}$ и $\gamma_\rho = \{z | |z-a| = \rho\} \subset V$.*

$$\text{Тогда } c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw \text{ и } |c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}\ , \text{ где } M = \max_{\gamma_\rho}|f|$$

Proof. Согласно примеру 1.1,

$$\int_{\gamma_\rho}\frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \int_{\gamma_\rho}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(z-a)^m\frac{dz}{(z-a)^{n+1}} = 2\pi i c_n$$

Таким образом, $|c_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\rho}\frac{|f(z)|}{\rho^{n+1}}|dz| = \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{n+1}}2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}.$ $\square$

Теорема 2.4 (Лиувилль). *Если функция голоморфна на всей плоскости и ограничена, то она постоянна.*

Proof. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и $|f(z)| \leq M$. Тогда по неравенству Коши $|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$ для всех $\rho > 0$. $\square$

2.2. **Изолированные особые точки.**

Определение 2.2. *Говорят, что $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции $f(z)$, если функция f голоморфна в некоторой проколотой окрестности $\{z \in |0 < |z - a| < r\}$ точки a. Особая точка a называется устранимой, если $\lim_{z\to a} f(z) = A \in \mathbb{C}$, полюсом, если $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, и существенно особой в остальных случаях.*

Теорема 2.5. *Пусть a — изолированная особая точка функции $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Тогда*

(1) *Следующие условия эквивалентны: а) a — устранимая особая точка; б) $|f(z)| \leq M$ в некоторой окрестности точки a; в) $c_n = 0$ при $n < 0$.*
(2) *Следующие условия эквивалентны: а) a — полюс; б) существует $N < 0$ такое, что $c_N \neq 0$ и $c_n = 0$ при $n < N$.*

Proof. 1. Очевидно, что из а) следует б) и из в) следует а). Докажем, что из б) следует в). Пусть $|f(z)| \leq M$ в некоторой окрестности точки a. Тогда согласно неравенству Коши $|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$ для любого $0 < \rho < 1$. Следовательно, $c_n = 0$ при $n < 0$, то есть из б) следует в).
2. Пусть a — полюс. Тогда в некоторой окрестности точки a $|f(z)| \neq 0$, и, следовательно, в этой окрестности функция $\phi(z) = \frac{1}{f(z)}$ голоморфна. Согласно уже доказанному утверждению 1, отсюда следует, что $\phi(z) = (z-a)^{-N} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, где $c_0 \neq 0$ и $N < 0$. Таким образом, $f(z) = \frac{1}{\phi(z)} = (z-a)^N \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$, где $b_0 \neq 0$. Обратное утверждение очевидно. $\square$

Таким образом, голоморфная функция с устранимыми особыми точками превращается в голоморфную во всех точках, если правильно определить ее в особых точках.

Определение 2.3. *Если $f(z) = (z-a)^N \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ и $c_0 \neq 0$, то при $N > 0$ число N называется порядком нуля, а при $N < 0$ число $-N$ называется порядком полюса функции $f(z)$ в точке a.*

Задача 2.1. *Функция f имеет полюс порядка N в точке , если и только если функция f^{-1} имеет 0 порядка N в точке a.*

Теорема 2.6 (Сохоцкий)**.** *Пусть a — существенная особая точка функции f и $A \in \mathbb{C} \cup \infty$. Тогда существует последовательность $a_n \to a$ такая, что $f(a_n) \to A$.*

Proof. Пусть $A = \infty$. Тогда утверждение теоремы следует из неограниченности функции f в любой окрестности точки a. Пусть $A \in \mathbb{C}$. Тогда или 1) существует последовательность $a_n \to a$ такая, что $f(a_n) = A$ или 2) существует проколотая окрестность точки a, где $f(z) \neq A$. В последнем случае, в этой окрестности функция $\phi(z) = \frac{1}{f(z)-A}$ голоморфна, и a — ее существенная особая точка. Значит, как уже доказано, существует последовательность $a_n \to a$ такая, что $\phi(a_n) \to \infty$. Но тогда $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(A + \frac{1}{\phi(a_n)}\right) = A$. $\square$

Определение 2.4. *Говорят, что ∞ — изолированная особая точка функции $f(z)$, если функция f — голоморфна в некоторой проколотой окрестности $\{R < |z| < \infty\}$ точки ∞. Для таких точек сохраняется та же классификация: устранимые особые точки, полюсы и существенно особые точки.*

Задача 2.2. *Точка ∞ — изолированная особая точка функции $f(z)$, если и только если 0 — изолированная особая точка функции $g(z) = f(z^{-1})$.*

Определение 2.5. *Функция, голоморфная на всей плоскости $\mathbb{C}$, называется целой. Если функция f не имеет в области $D \subset \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ других точек неголоморфности, кроме устранимых особых точек и полюсов, то говорят, что функция f мероморфна на D.*

Задача 2.3. *Функция $f(z)$ — мероморфна на всей сфере $\overline{\mathbb{C}}$, если и только если она рациональна, то есть $f(z) = \frac{a_0 z^n + \ldots + a_n}{b_0 z^m + \ldots + b_m}$.*

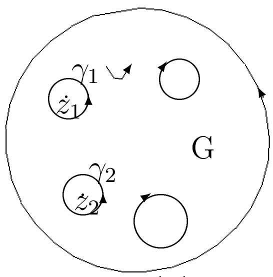
Это важное утверждение демонстрирует фундаментальную взаимосвязь между аналитическими свойствами функции и ее алгебраичностью.

2.3. **Вычеты и интегралы в смысле главного значения.** Далее, если не оговорено противное, все контуры считаются ориентированными против часовой стрелки.

Определение 2.6. *Пусть функция $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ определена в области U и $\gamma = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| = r\} \subset U$. Тогда величина $\mathsf{res}_{z_0} f = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz$ называется вычетом функции f.*

Теорема 2.7. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D всюду кроме изолированных особых точек, $G \subset D$ — компактное подмножество и его граница ∂G не содержит особых точек. Тогда $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(z)\, dz = \sum_j \mathsf{res}_{z_j} f$, где сумма берется по всем особым точкам, принадлежащим G.*

Proof. Пусть $\gamma_j \subset G$ — попарно непересекающиеся замкнутые контуры, окружающие точки z_j (см.рисунок)



Тогда согласно теореме 1.6 и примеру 1.1,

$$\int_{\partial G} f(z)\, dz = \sum_j \int_{\gamma_j} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_j \mathsf{res}_{z_j} f.$$

□

Определение 2.7. *Пусть функция $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ голоморфна в области $U = \{z \in \mathbb{C} | |z| > R\}$ и контур $\gamma = \{z \in \mathbb{C} | |z| = r\} \subset U$ ориентирован против часовой стрелки. Тогда величина $\mathsf{res}_\infty f = -c_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz$ называется вычетом функции $f(z)$ в ∞.*

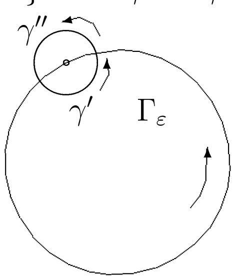
Теорема 2.8. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна всюду на сфере $\overline{\mathbb{C}}$, за исключением конечного числа точек $z_1, \ldots, z_n \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда $\sum_{i=1}^{n} \mathsf{res}_{z_i} f = 0$.*

Как вы уже заметили, все определения и теоремы для функций на $D \subset \mathbb{C}$ естественно распространяются на области, содержащие ∞. С этой точки зрения знак "-" в предыдущем определении объясняется что рассматриваемый нами контур обходит ∞ против часовой стрелки.

Определение 2.8. *Пусть функция $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ определена в области $U \setminus z_0$ и z_0 — внутренняя точка компактной кривой Γ. Положим $G_\varepsilon = \{z \in G||z-z_0| \le \varepsilon\}$ и $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \setminus G_\varepsilon$. Тогда предел v.p. $\int_\Gamma f(z)\, dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\, dz$ называется интегралом по Γ в смысле главного значения.*

Теорема 2.9. *Пусть функция $\mu(z)$ голоморфна в проколотой окрестности z_0, $|\mu(z) - \mu(z_0)| \le const|z - z_0|$ (условие Липшица) и $z_0 \in \Gamma$, где Γ — гладкая кривая. Тогда v.p. $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\mu(z)}{z - z_0} dz = \pi i \mu(z_0) + \int_\Gamma \frac{\mu(z) - \mu(z_0)}{z - z_0} dz$.*

Proof. Можно считать, что кривая Γ замкнута и лежит в проколотой окрестности точки z_0, в которой функция $\mu(z)$ голоморфна. Положим $\gamma_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}||z - z_0| = \varepsilon\} = \gamma' \cup \gamma''$, где $\gamma' \cap \gamma'' \subset \Gamma$ (см.рисунок).



Тогда

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z)}{z - z_0} dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z) - \mu(z_0)}{z - z_0} dz + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z_0)}{z - z_0} dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z) - \mu(z_0)}{z - z_0} dz + \int_{\gamma'} \frac{\mu(z_0)}{z - z_0} dz$$

Поэтому $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z)}{z - z_0} = \int_\Gamma \frac{\mu(z) - \mu(z_0)}{z - z_0} dz + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z_0)}{z - z_0} dz = \int_\Gamma \frac{\mu(z) - \mu(z_0)}{z - z_0} dz + \pi i \mu(z_0)$.

□

2.4. **Принцип аргумента.**

Определение 2.9. *В случае, если f имеет в z_0 нуль(или полюс) порядка n, будем говорить, что f имеет в z_0 n нулей (соответственно, n полюсов).*

Теорема 2.10. *Пусть функция f мероморфна в области D и $\Gamma \subset D$ — замкнутый контур, ограничивающий множество G. Пусть N — число нулей и P — число полюсов функции f в множестве G, причем граница $\partial G = \Gamma$ не содержит нулей и полюсов функции f. Тогда $N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.*

Proof. Пусть z_0 — нуль порядка n или полюс порядка $-n$. Тогда

$$f(z) = (z - z_0)^n \phi(z), \quad \text{где} \quad \phi(z_0) \ne 0,$$

$$f'(z) = (z - z_0)^{n-1} \left((z - z_0)\phi'(z) + n\phi(z)\right)$$

и
$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{z-z_0}\left(n + (z-z_0)\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\right).$$
Таким образом, $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{z_0}}\frac{f'}{f}dz = n$, где $\gamma_{z_0} \subset G$ — контур, отделяющий точку z_0 от других нулей и полюсов. По теореме Коши интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ равен сумме всех интегралов вида $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{z_0}}\frac{f'}{f}dz$, отвечающих нулям и полюсам z_0 функции f. Следовательно, $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$. □

Напомним, что число $\phi \in [0, 2\pi)$ называется *аргументом* числа $u = re^{i\phi}$ и обозначается $\arg u$. Пусть функция $f(u)$ определена на контуре Γ и $f|_\Gamma \neq 0$. Если переменная u обходит контур Γ один раз против часовой стрелки, то число $e^{i\arg f(u)}$ обходит контур $S = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ целое число раз, обозначаемое $\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg f$.

Теорема 2.11. *[Принцип аргумента] В предположениях теоремы 2.10* $N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg f(z)$.

Proof. Продеформируем Γ в малые контуры γ_i вокруг нулей и полюсов $f(z)$, и отрезки, соединяющие их с Γ (см. рисунок к теореме 1.6). Отрезки проходятся дважды в противоположных направлениях и вклада в величину $\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg f(z)$ не дают. Следовательно, величина $\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg f(z)$ равна сумме величин $\frac{1}{2\pi}\Delta_{\gamma_i} \arg f(z)$ по всем контурам γ_i. Если γ — маленький контур, окружающий точку z_0, где $f(z) = (z-z_0)^n\phi(z)$ и $\phi(z_0) \neq 0$, то $\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg f(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \arg(z-z_0)^n = n$. □

Теорема 2.12 (Руше). *Пусть функции f и g голоморфны в области D и замкнутый контур $\Gamma \subset D$, ограничивающий множество G, не содержит нулей f. Пусть $|f(z)| > |g(z)|$ на Γ. Тогда функции f и $f+g$ имеют в G одинаковое число нулей.*

Proof. Положим $F_\lambda = f + \lambda g$. Тогда $F_\lambda|_{\partial G} \neq 0$ при $0 \leq \lambda \leq 1$. Следовательно, функция $\psi(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg F_\lambda(z)$ существует, непрерывна, и, значит, постоянна. В частности,
$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg f(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg F_0(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg F_1(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg(f(z) + g(z)).$$
Принцип аргумента завершает доказательство теоремы □

Следствие 2.1. *[Основная Теорема Алгебры] Многочлен степени n имеет на $\mathbb{C}$ ровно n корней.*

Proof. Произвольный многочлен имеет вид
$$P_n = a_n z^n + \cdots + a_0 = f(z) + g(z),$$
где $f(z) = a_n z^n$, $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. Применим теперь теорему Руше к паре f, g и контуру Γ_R $\{z \in \mathbb{C} | |z| = R\}$ при достаточно большом R. □

2.5. **Топологические свойства мероморфных функций.**

Лемма 2.1. *Пусть $f(z) = w_0 + (z-z_0)^n\phi(z)$, где $1 \leq n$, функция ϕ голоморфна в окрестности точки z_0 и $\phi(z_0) \neq 0$. Тогда существуют области $z_0 \in U$ и $w_0 \in W \subset f(U)$ такие что для любой точки $w \in W \setminus w_0$ функция $f|_U$ принимает значение w в ровно n различных точках.*

Proof. Выберем r таким образом, чтобы на множестве $D = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| \leq r\}$ функция $\phi(z)$ не обращалась в нуль и f' не имела нулей на $D \setminus z_0$. Положим $U = D \setminus \partial D$, $\mu = \min\limits_{z \in \partial D} |f(z) - w_0| > 0$ и $W = \{w \in \mathbb{C} | |w - w_0| < \mu\}$.

Для произвольного $w \in W$ рассмотрим функцию $F(z) = f(z) - w = (f(z) - w_0) + (w_0 - w)$. На контуре ∂D ее части $(f(z) - w_0)$ и $(w_0 - w)$ удовлетворяют условию $|f(z) - w_0| \geq \mu \geq |w_0 - w|$. Согласно теореме Руше, отсюда следует, что функция $F(z) = f(z) - w$ имеет в области U столько же нулей, что и функция $(f(z) - w_0)$, то есть n нулей. При $w \neq w_0$ все они различны, поскольку f' не имеет нулей на $U \setminus z_0$. □

Теорема 2.13. *[Сохранение области] Если функция f голоморфна в области D и $f \neq const$, то $f(D)$ — тоже область.*

Proof. Согласно лемме 2.1, для всякой точки $z_0 \in D$ существует окрестность W точки $w_0 = f(z_0)$, такая что $W \subset f(D)$. □

Теорема 2.14 (Принцип максимума модуля). *Если непостоянная функция f голоморфна в области D и непрерывна на замыкании $\overline{D} \subset \mathbb{C} \cup \infty$, то $\max\limits_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max\limits_{z \in \partial \overline{D}} |f(z)|$.*

Proof. Пусть функция $|f|$ достигает максимума в точке $z_0 \in D$ и $w_0 = f(z_0)$. Тогда, согласно теореме 2.13, $W = \{z \in \mathbb{C} | |w - w_0| < r\} \subset f(D)$ для некоторого r. Множество W содержит точки w такие что $|w| > |w_0|$. Следовательно, существует точка $z \in D$ такая, что $w = f(z) \in W$ и $|f(z)| = |w| > |w_0|$. □

Теорема 2.15 (Лемма Шварца). *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области $U = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$, $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leq 1$. Тогда $|f(z)| \leq |z|$ для всех точек $z \in U$, причем если $|f(z_0)| = |z_0|$ при $z_0 \neq 0$, то $f(z) = \alpha z$, где $|\alpha| = 1$.*

Proof. Функция $\phi(z) = \frac{f(z)}{z}$ голоморфна на каждом круге $U_r = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq r\}$, где $r < 1$. Согласно теореме 2.14, $\max\limits_{z \in U_r} |\phi(z)| \leq \max\limits_{z \in \partial U_r} |\frac{f(z)}{z}| \leq \frac{1}{r}$. Таким образом, $|\phi(z)| \leq 1$, то есть $|f(z)| \leq |z|$. Если $|f(z_0)| = |z_0|$ при $z_0 \in U$, то $z_0 \in U_r \setminus \partial U_r$ и $|\phi(z_0)| = 1 = \max\limits_{z \in D_r} \phi(z)$. Согласно теореме 2.14, отсюда следует $\phi(z) = const$, причем $f(z) = \phi(z) z$, где $|\phi(z)| = 1$. □

3. Теорема Римана.

3.1. Непрерывные функционалы на компактных семействах функций.

Определение 3.1. *Семейство функций $\mathfrak{F}$ называется равномерно ограниченным внутри области D, если для любого компакта $K \subset D$ существует константа $M = M(K)$, такая что $|f(z)| \leq M$ для всех $f \in \mathfrak{F}, z \in K$.*

Задача 3.1. *Если семейство голоморфных функций $\mathfrak{F}$ равномерно ограничено внутри области D, то семейство функций $\{f'\}$ также равномерно ограничено внутри D. (Указание: Воспользоваться формулой Коши).*

Определение 3.2. *Семейство функций $\mathfrak{F}$ называется равностепенно непрерывным внутри области D, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $K \subset D$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, K)$, такое что для всех $f \in \mathfrak{F}$ выполняется условие $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$, если $z_1, z_2 \in K$ и $|z_1 - z_2| < \delta$.*

Задача 3.2. *Если семейство функций $\mathfrak{F}$, голоморфных внутри области D, равномерно ограничено внутри области D, то оно равностепенно непрерывно внутри D. (Указание: Воспользоваться задачей 3.1).*

Определение 3.3. *Последовательность функций на D называется фундаментальной, если она равномерно сходится на каждом компакте $K \subset D$.*

Теорема 3.1. *[Монтель] Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство голоморфных функций, равномерно ограниченных внутри области D. Тогда из каждой последовательности $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$ можно выбрать фундаментальную подпоследовательность.*

Proof. Пусть $\mathbb{Q} = \{\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \dots\} \subset D$ — подмножество всех точек с рациональными вещественными и мнимыми частями. Выберем из последовательности f_n подпоследовательность f_n^1, такую что $f_n^1(\widetilde{z}_1)$ сходится. Выберем из последовательности f_n^1 подпоследовательность f_n^2, такую что $f_n^2(\widetilde{z}_2)$ сходится и.т.д.... Положим $h_n = f_n^n$. Тогда $h_n(\widetilde{z}_p)$ сходится при любом p. Докажем фундаментальность последовательности h_n. Пусть $K \subset D$ — компакт. Тогда, согласно задаче 3.2, существует покрытие множества K квадратиками, такое что, если z' и z'' принадлежат одному квадратику, то $|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ввиду компактности K можно считать, что таких квадратиков конечное число. Выберем в каждом из них по одной точке из множества $\mathbb{Q}$. Получим точки $z_1, \dots, z_p$. Ввиду сходимости последовательностей $h_n(z_i)$, для всех i и, согласно критерию Коши, существует N, такое что $|h_m(z_i) - h_n(z_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $n, m > N$ и всех i. Таким образом, если z_k лежит в том же квадратике, что и z, то $|h_m(z) - h_n(z)| \le |h_m(z) - h_m(z_k)| + |h_m(z_k) - h_n(z_k)| + |h_n(z_k) - h_n(z)| < \varepsilon$. Следовательно, согласно критерию Коши, последовательность функции h_n равномерно сходится на K. □

Определение 3.4. *Семейство функций $\mathfrak{F}$ на D называется компактным, если из любой последовательности функций $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$ можно выбрать фундаментальную подпоследовательность, сходящуюся к функции из $\mathfrak{F}$.*

Определение 3.5. *Отображение $J : \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$, определенное на семействе функций $\mathfrak{F}$, называется функционалом. Функционал называется непрерывным, если для любой фундаментальной последовательности $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$, сходящейся к $f \in \mathfrak{F}$, имеет место равенство $\lim_{n\to\infty} J(f_n) = J(f)$.*

Задача 3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство функций, голоморфных в области $D \ni a$. Доказать, что $J(f) \equiv f^{(p)}(a)$ — непрерывный функционал.*

Задача 3.4. *Доказать, что непрерывный функционал на компактном семействе ограничен.*

Теорема 3.2. *Пусть J - непрерывный функционал на компактном семействе $\mathfrak{F}$ функций на D. Тогда существует функция $f_0 \in \mathfrak{F}$, такая что $|J(f_0)| \ge |J(f)|$ для всех функций $f \in \mathfrak{F}$.*

Proof. Пусть $A = \sup_{f\in\mathfrak{F}} |J(f)|$. Тогда существует последовательность $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$ такая, что $\lim_{n\to\infty} |J(f_n)| = A$. Ввиду компактности семейства $\mathfrak{F}$ существует фундаментальная подпоследовательность функций $\{h_m\} \subset \{f_n\}$, сходящаяся к $f_0 \in \mathfrak{F}$. Ввиду непрерывности функционала $A = \lim_{n\to\infty} |J(f_n)| = \lim_{m\to\infty} |J(h_m)| = |J(f_0)|$ □

3.2. **Теорема Гурвица и однолистные функции.**

Теорема 3.3. *[Гурвиц] Пусть последовательность* $\{f_n\}$ *голоморфных функций в области* D *фундаментальна,* $f = \lim_{n\to\infty} f_n \neq const$ *и* $f(z_0) = 0$. *Тогда для любого* $r > 0$ *существует* N *такое, что для любого* $n > N$ *функция* f_n *имеет нуль в области* $\{z \in D | |z - z_0| < r\}$.

Proof. Согласно теореме Вейерштрасса (1.15) $f(z) = (z - z_0)^p(a + \phi(z))$, где $a \neq 0$, функция $\phi(z)$ голоморфна и $\phi(z_0) = 0$. Поэтому существует $\rho > 0$ такое, что $|f(z)| > 0$ на множестве $Q = \{0 < |z - z_0| \leq \rho\}$. Положим $\mu = \min\limits_{\partial Q} |f(z)| > 0$. Поскольку последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на границе ∂Q, то существует N такое, что для любых $n > N$ и $z \in \partial Q$ выполнено неравенство $|f_n(z) - f(z)| < \mu$. Следовательно, согласно теореме Руше(2.12) функция $f_n = f + (f_n - f)$ имеет в области $Q \setminus \partial Q$ нуль. □

Определение 3.6. *Функция* f *называется однолистной, если она реализует взаимно-однозначное соответствие, то есть* $f(z_1) \neq f(z_2)$ *при* $z_1 \neq z_2$.

Теорема 3.4. *[Критерий однолистности] Голоморфная функция* f *однолистна в некоторой окрестности точки* z_0*, если и только если* $f'(z_0) \neq 0$.

Proof. Согласно лемме 2.1, обратимость f в окрестности точки z_0 эквивалентна равенству $f(z) = w_0 + (z - z_0)\phi(z)$, где $\phi(z_0) \neq 0$, что эквивалентно условию $f'(z_0) \neq 0$. □

Задача 3.5. *Доказать, что функция* g*, обратная к однолистной функции* f*, тоже однолистна и* $g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.

Теорема 3.5. *Пусть последовательность однолистных на области* D *функций* $\{f_n\}$ *фундаментальна и сходится к непостоянной функции* f. *Тогда функция* f *однолистна.*

Proof. Согласно теореме Вейерштрасса f — голоморфная функция. Предположим, что $z_1 \neq z_2$ и $f(z_1) = f(z_2)$. Рассмотрим область $Q = \{z \in D | |z - z_1| < |z_2 - z_1|\}$. Последовательность функций $h_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2)$ сходится к функции $h(z) = f(z) - f(z_2)$, где $h(z_1) = 0$. Согласно теореме 3.3, существуют N и $z_0 \in Q$ такие что $h_N(z_0) = 0$. Следовательно, $f_N(z_0) = f_N(z_2)$, что противоречит однолистности функции f_N. □

Теорема 3.6. *Пусть* S *— семейство всех голоморфных однолистных функций на области* D*, таких что* $|f| \leq 1$. *Предположим, что оно не пусто. Тогда существуют функция* $f_0 \in S$ *и точка* $a \in D$ *такие что* $|f'(a)| \leq |f_0'(a)| > 0$ *для всех* $f \in S$.

Proof. По условию существуют функция $f_1 \in S$ и точка $a \in D$ такие что $|f_1'(a)| > 0$. Положим $S_1 = \{f \in S | |f'(a)| \geq |f_1'(a)|\}$. Согласно теореме Монтеля(3.1), из каждой последовательности $\{f_n\} \subset S_1$ можно выбрать фундаментальную подпоследовательность. По теореме Вейерштрасса её предел g — голоморфная функция, такая что $|g'(a)| \geq |f_1'(a)| > 0$, то есть $g \neq const$. Согласно теореме 3.5 о пределе однолистных функций, отсюда следует, что g — однолистная функция, то есть $g \in S_1$. Таким образом, S_1 – компактное семейство функций. Согласно задаче 3.3, $y(a) = |f'(a)|$ — непрерывный функционал на S_1. Согласно теореме 3.2, он достигает максимума на некоторой функции $f_0 \in S_1$. Следовательно, $|f_0'(a)| \geq |f'(a)|$ для всех $f \in S$. □

3.3. **Аналитическое продолжение и аналитические функции.**

Определение 3.7. *Каноническим элементом называется пара* (U_a, f_a)*, где* U_a *— круг с центром в* a*, и* $f_a(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(z-a)^i$ *— ряд сходящийся в* U*. Канонические элементы* (U_a, f_a) *и* $(\tilde{U}_a, \tilde{f}_a)$ *считаются эквивалентными, если* $f_a|_{U_a \cap \tilde{U}_a} = \tilde{f}_a|_{U_a \cap \tilde{U}_a}$

Определение 3.8. *Пусть* $\gamma \subset \mathbb{C}$ *— путь без самопересечений, соединяющий точки* $a \neq b$*. Говорят, что канонический элемент* (U_b, f_b) *является аналитическим продолжением канонического элемента* (U_a, f_a) *вдоль пути* γ*, если существуют эквивалентные* (U_a, f_a) *и* (U_b, f_b) *канонические элементы* $(\tilde{U}_a, \tilde{f}_a)$ *и* $(\tilde{U}_b, \tilde{f}_b)$*, область* $D \supset \gamma \cup \tilde{U}_a \cup \tilde{U}_b$ *и голоморфная функция* $f : D \to \mathbb{C}$ *такие, что* $f|_{D \cap U_a} = f_a|_{D \cap U_a}$ *и* $f|_{D \cap U_b} = f_b|_{D \cap U_b}$.

Задача 3.6. *Докажите, что класс эквивалентности аналитического продолжения определен корректно, то есть не зависит от выбора области* D.

Замечание 3.1. *Аналитическое продолжение можно построить, покрыв путь дисками* $\gamma \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{a_i}$*, где* $U_{a_1} = U_a$ *и* $U_{a_k} = U_b$ *и последовательно "переразложить" функцию* f *от диска к диску, строя канонические элементы* (U_{a_i}, f_{a_i}) *такие, что* $f_{a_i}|_{U_{a_i} \cap U_{a_{i+1}}} = f_{a_{i+1}}|_{U_{a_i} \cap U_{a_{i+1}}}$.

Теорема 3.7. *Пусть* γ_0 *и* γ_1 *— гомотопные пути с одинаковыми концами* a *и* b*, и* $\gamma_t (t \in [0,1])$ *— гомотопия между ними. Пусть* (U_a, f_a) *— канонический элемент, имеющий аналитическое продолжение вдоль каждого пути* γ_t*. Тогда аналитические продолжения канонического элемента* (U_a, f_a) *вдоль путей* γ_0 *и* γ_1 *эквивалентны.*

Proof. Рассмотрим множество T таких $t \in [0,1]$, что аналитические продолжения вдоль путей γ_0 и γ_t эквивалентны. Для любой области $D \supset \gamma_t$ существует $\delta > 0$ такое, что $D \supset \gamma_{t'}$ при $|t - t'| < \delta$. Поэтому можно считать, что область D', реализующая продолжение канонического элемента (U_a, f_a) вдоль путей $\gamma_{t'}$ содержится в D и, следовательно дает канонический элемент эквивалентный продолжению по пути γ_t. Таким образом, множество T — открыто. Аналогичное рассуждение показывает, что T замкнуто. Значит, $T = [0,1]$. □

Задача 3.7. *Показать, что при нарушении условия теоремы 3.7 о существовании аналитического продолжения вдоль каждого пути* γ_t *аналитические продолжения вдоль путей* γ_0 *и* γ_1 *могут не быть эквивалентными.*

Определение 3.9. *Аналитической функцией* F *называется множество всех аналитических продолжений* $\{(U_a^l, f_a^l)\}$ *канонического элемента* (U_a, f_a) *по всем путям* l *с началом в* a*, которые можно разбить на пути без самопересечений. Две аналитические функции считаются равными, если они имеют хотя бы одну пару эквивалентных канонических элементов.*

Язык аналитических функций — это удобный подход к описанию "хороших многозначных функций" типа логарифмов или неявных функций $F(z,w) = 0$. Именно такие функции часто возникают в естественных науках. Но, в виду их многозначности, такие функции невозможно рассматривать как отображения.

Определение 3.10. *Пусть* $F = \{(U_a^l, f_a^l) | l \in L\}$ *— аналитическая функция. Сопоставим каждому* $z \in \overline{\mathbb{C}}$ *множество* $L(z) = \{l \in L | z \in U_a^l\}$ *и набор* $\{z^l | l \in L(z)\}$ *копий точки* z. *Рассмотрим теоретико-множественное объединение* $\bigcup\limits_{z \in \overline{\mathbb{C}}, l \in L(z)} z^l$ *и отождествим точки* z^l *и* $z^{\tilde{l}}$, *если функции* f_a^l *и* $f_a^{\tilde{l}}$ *совпадают в некоторой окрестности точки* z. *Получившееся множество* P_F *называется римановой поверхностью* P_F *аналитической функции* F. *Соответствие* $(z^l, U_a^l) \mapsto f_a^l(z^l)$ *задает отображение* $f_F : P_F \to \mathbb{C}$.

Это определение позволяет рассматривать аналитическую функцию F как отображение f_F ее римановой поверхности P_F на сферу Римана.

Задача 3.8. *Построить римановы поверхности функций* $w = \ln(z)$ *и* $w = \sqrt{z^3 + az^2 + bz + c}$.

Задача 3.9. *Дайте определение мероморфной аналитической функции* F, *ее римановой поверхности и отображения* $f_F : P_F \to \mathbb{C}$

3.4. **Теорема Римана.**

Задача 3.10. *Если* $|a| < 1, |b| < 1$, *то* $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1$.

Определение 3.11. *Области* $D_1, D_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ *называются биголоморфно эквивалентными, если между ними существует взаимно-однозначное голоморфное отображение* $\varphi : D_1 \to D_2$. *Обратное отображение* $\varphi^{-1} : D_2 \to D_1$ *в этом случае тоже голоморфно (задача 3.5). Поэтому такое отображение* φ *называется биголоморфным.*

Пример 3.1.

- *Отображение* $h(z) = \frac{1}{z} + c$ *биголоморфно переводит* $\mathbb{C}$ *в* $\overline{\mathbb{C}} \setminus c$. *Значит все сферы Римана без одной точки биголоморфно эквивалентны* $\mathbb{C}$.
- *Биголоморфное отображение является гомеоморфизмом. Поэтому сфера Римана* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ *не биголоморфно эквивалентна комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ *и единичному диску* $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} || z| < 1\}$.
- *Комплексная плоскость* $\mathbb{C}$ *и единичный диск* Λ *гомеоморфны, но тоже не биголоморфно эквивалентны. Это следует из следующего замечания.*

  Соответствие $f(z) \mapsto f^*(z) = f(\varphi(z))$ *устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множествами голоморфных функций на* D_1 *и* D_2. *Это соответствие переводит ограниченные функции в ограниченные и постоянные функции в постоянные. Функция* $f(z) = z$ *голоморфна, ограничена и непостоянна на* Λ. *В то время как, согласно теореме Лиувилля, все ограниченные голоморфные функции на* $\mathbb{C}$ *постоянны.*

Теорема 3.8 (Риман). *Всякая связная односвязная область на сфере Римана биголоморфно эквивалентна или самой сфере Римана* $\overline{\mathbb{C}}$, *или комплексной плоскости* $\mathbb{C}$, *или единичному диску* Λ.

Proof. Пусть связная и односвязная область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ не биголоморфно эквивалентна $\overline{\mathbb{C}}$ и $\mathbb{C}$. Тогда дополнение $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ содержит не совпадающие точки $\alpha \neq \beta$.

Рассмотрим множество S всех однолистных функций $g : D \to \Lambda$. Докажем, что $S \neq \emptyset$. Рассмотрим "функцию" $f = \sqrt{\frac{z-\alpha}{z-\beta}}$. Она принимает в $a \in D$ два значения и порождает два канонических элемента (U_a^1, f_a^1), (U_a^2, f_a^2), где $f_a^1 = -f_a^2$ на $U_a^1 \cap U_a^2$. Соединим произвольную точку $b \in D$ с точкой a путем $\gamma \subset D$. Пусть (U_b^i, f_b^i) — аналитическое продолжение (U_a^i, f_a^i) вдоль γ.

Согласно теореме 3.7, класс эквивалентности канонического элемента (U_b^i, f_b^i) не зависит от γ. Таким образом, существуют аналитические функции $f^i : D \to \mathbb{C}$, такие что $f_b^i = f^i|_{U_b}$ для всех $b \in D$, причем $f^2 = -f^1$. Положим $D_i = f^i(D)$.

Если $f^i(z_1) = \pm f^i(z_2)$, то $\frac{z_1-\alpha}{z_1-\beta} = \frac{z_2-\alpha}{z_2-\beta}$, откуда $z_1 = z_2$. Таким образом, функции f^i однолистны и $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Согласно теореме 2.13 о сохранения области, область D_2 содержит круг $W = \{w \in \mathbb{C} | |w - w_0| < \rho\}$, ввиду $W \cap D_1 = \emptyset$, причем $|f^1(z) - w_0| > \rho$. Положим $\tilde{f}(z) = \frac{\rho}{f^1(z)-w_0}$. Функция $\tilde{f} \neq const$ голоморфна, однолистна и $|\tilde{f}(z)| < 1$.

Таким образом $S \ni \tilde{f}$ и согласно теореме 3.6, существуют точка $a \in D$ и функция $f_0 \in S$ такие, что $|g'(a)| \leq |f_0'(a)| > 0$ для всех функций $g \in S$.

Докажем, что $f_0(D) = \Lambda$. Положим $h(z) = \dfrac{f_0(z) - f_0(a)}{1 - \overline{f_0(a)} f_0(z)}$. Функция $h(z)$ — однолистна и, согласно задаче 3.10, $|h(z)| \leq 1$. Следовательно, $h \in S$ и $|f_0'(a)| \geq |h'(a)|$.

С другой стороны, прямое вычисление показывает, что $h'(a) = \frac{f_0'(a)}{1-\overline{f_0(a)}f_0(a)}$. Таким образом

$$|f_0'(a)| \geq |h'(a)| = \frac{1}{1 - |f_0(a)|^2} |f_0'(a)| \quad \text{и} \quad f_0(a) = 0.$$

Докажем, что любое $b \in \Lambda \setminus 0$ принадлежит $f_0(D)$. Предположим что $b \notin f_0(D)$. Рассмотрим $\psi(z) = \sqrt{\dfrac{f_0(z) - b}{1 - \bar{b} f_0(z)}}$. Аналитически продолжая канонический элемент (U_a, ψ_a^1) функции ψ, построим голоморфную однолистную функцию ψ^1 на D. Рассмотрим функцию $\tilde{h}(z) = \dfrac{\psi^1(z) - \psi^1(a)}{1 - \overline{\psi^1(a)} \psi^1(z)}$. Она однолистна и, согласно задаче 3.10, $|\tilde{h}(z)| \leq 1$. Следовательно $\tilde{h} \in S$ и $|f_0'(a)| \geq |\tilde{h}'(a)|$.

С другой стороны, прямое вычисление показывает, что $|\tilde{h}'(a)| = \frac{1+|b|}{2\sqrt{|b|}} |f_0'(a)|$. Но тогда $|f_0'(a)| \geq |\tilde{h}'(a)| = \frac{1+|b|}{2\sqrt{|b|}} |f_0'(a)| > |f_0'(a)|$. Полученное противоречие доказывает, что $b \in f_0(D)$. $\square$

3.5. **Автоморфизмы односвязных областей и соответствие границ.** Голоморфный изоморфизм области $D \in \overline{\mathbb{C}}$ на себя называется *автоморфизмом* комплексной области D. Суперпозиция таких автоморфизмов задает на их множестве структуру группы $\mathsf{Aut}(D)$.

Задача 3.11. *Доказать, что отображение* $f(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ *принадлежит* $\mathsf{Aut}(\Lambda)$, *если* $|a| < 1$.

Теорема 3.9. $\mathsf{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \{z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} | a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0\}$,

$$\mathsf{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b | a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$$

$$\mathsf{Aut}(\Lambda) = \{z \mapsto e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\overline{a}z} | |a| < 1, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Proof. Из определений следует, что любой автоморфизм комплексной плоскости $\mathbb{C}$ является мероморфной функцией на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$ с единственным простым полюсом в ∞. Такая функция является автоморфизмом $\overline{\mathbb{C}}$. Таким образом $\mathsf{Aut}(\mathbb{C}) = \{f \in \mathsf{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) | f(\infty) = \infty\}$.

Пусть $g \in \mathsf{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \setminus \mathsf{Aut}(\mathbb{C})$. Тогда $g(a) = \infty$ для $a \in \mathbb{C}$. Согласно теоремам об изолированных особых точках (2.5 и 2.7), $g(z) = \frac{A}{z-a} + \phi(z)$, где функция ϕ голоморфна на $\mathbb{C}$. Кроме того, $\lim_{z\to\infty} \phi(z) = \lim_{z\to\infty} g(z) = g(\infty) \in \mathbb{C}$ и по теореме 2.4 Лиувилля $\phi(z) = const$. Таким образом, $\mathsf{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \setminus \mathsf{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto \frac{A}{z-a} + B | A, B, a \in \mathbb{C}, A \neq 0\}$.

Если $f \in \mathsf{Aut}(\mathbb{C})$, то $f(z^{-1}) \in \mathsf{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \setminus \mathsf{Aut}(\mathbb{C})$ и, как уже доказано, $f(z^{-1}) = \frac{A}{z} + B$. Отсюда $f(z) = Az + B$, где $A \neq 0$.

Пусть $f \in \mathsf{Aut}(\Lambda)$ и $f(a) = 0$. Положим $\phi(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ и $g(z) = f(\phi^{-1}(z))$. Тогда согласно задаче 3.11, $g \in \mathsf{Aut}(\Lambda)$, причем $g(0) = 0$. Применяя лемму Шварца (теорема 2.15) к функциям g и g^{-1}, находим, что $|g(z)| = |z|$. Отсюда по лемме Шварца $g(z) = e^{i\alpha}z$. Таким образом, для $w = \phi(z)$ мы имеем $f(w) = g(\phi(w)) = e^{i\alpha}\frac{w-a}{1-\overline{a}w}$ □

Задача 3.12. *Доказать, что* $\mathsf{Aut}(\{z \in \mathbb{C} | \mathtt{Im}(z) > 0\}) = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} | a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc > 0\}$

Обсудим вопрос о продолжении биголоморфного отображения на границу. Приведем без доказательства следующую важную теорему, называемую принципом соответствия границ.

Теорема 3.10. *(Каратеодори) Пусть области* $D_1, D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ *ограничены жордановыми кривыми. Тогда биголоморфное отображение* $f : D_1 \to D_2$ *продолжается до гомеоморфизма замыканий* $\bar{f} : \bar{D}_1 \to \bar{D}_2$

Задача 3.13. *Доказать, что если граница области содержит аналитическую дугу* γ*,то биголоморфное отображение этой области на единичный круг можно аналитически продолжить через* γ*.*

4. Гармонические функции.

Как и раньше мы будем отождествлять вещественную плоскость $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)\}$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C} = \{z\}$, полагая $z = x + iy$. Напомним, что открытое подмножество $D \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ называется *областью*.

Определение 4.1. *Вещественная функция* $u(x, y)$ *на области* D *с непрерывными вторыми частными производными называется гармонической, если она удовлетворяет уравнению Лапласа* $\Delta u = 0$*, где*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

— оператор Лапласа.

Гармонические функции естественно возникают при решении широкого круга прикладных задач от гидромеханики до теоретической физики.

Теорема 4.1. *Функция u на связной односвязной области D является гармонической, если и только если она совпадает с вещественной частью некоторой голоморфной функции f, т.е. $u(x,y) = \mathtt{Re} f(x+iy)$.*

Proof. Рассмотрим функцию $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Если f— голоморфная функция, то условия Коши-Римана дают

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

поэтому,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Предположим, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial u}{\partial y})$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x}),$$

что эквивалентно условиям Коши-Римана на функцию

$$g(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Таким образом, $g(z)$ — голоморфная функция. Рассмотрим ее первообразную

$$f(x+iy) = \int\limits_{z_0}^{z} g(z)dz = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y})(dx + idy).$$

Тогда

$$\mathtt{Re} f(x+iy) = u(x_0,y_0) + \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy) = u(x,y).$$

□

Задача 4.1. *Доказать, что функция u на связной односвязной области D является гармонической, если и только если она совпадает с мнимой часть некоторой голоморфной функции.*

Тесная связь между гармоническими и голоморфными функциями позволяет легко переносить на гармонические функции многие свойства голоморфных.

Задача 4.2. *Доказать, что на области D:*

- *Гармоническая функция бесконечно дифференцируема, причем все ее частные производные также гармонические.*

- *Биголоморфная замена области определения переводит гармоническую функцию в гармоническую.*
- *Гармонические функции на связном множестве совпадают, если они совпадают на его открытом подмножестве.*

4.1. **Интегральные формулы для гармонической функции.** Далее мы считаем, что граница области ∂D является аналитической кривой, ориентированной как граница области D и рассматриваемые на ней гармонические функции непрерывны на замыкании области.

Через

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}$$

будет обозначаться производная по направлению внешней нормали $n = (\cos\theta, \sin\theta)$ к границе ∂D.

Задача 4.3. *Используя формулу Стокса и соотношение*

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} ds = -\frac{\partial \psi}{\partial y} dx + \frac{\partial \psi}{\partial x} dy,$$

доказать формулу Грина

$$\oint\limits_{\partial D} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = \int\int\limits_{D} (\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}) dxdy + \int\int\limits_{D} \varphi (\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}) dxdy,$$

для дважды непрерывно дифференцируемых в D функций φ, ψ.

Теорема 4.2. *Пусть функции $u(x+iy) = u(x,y)$ и $v(x+iy) = v(x,y)$ гармонические в D и дважды непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$. Тогда*

$$\oint\limits_{\partial D} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}) ds = 0,$$

$$\oint\limits_{\partial D} \{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\} ds = \delta 2\pi u(\xi),$$

где $\delta = 1$ при $\xi \in D$ и $\delta = 0$ при $\xi \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$

и

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi\rho} \oint\limits_{|z-\xi|=\rho} u(z) ds,$$

если $U_\rho = \{z \in \mathbb{C} | |z-\xi| < \rho\} \subset D$

Proof. Первая формула сразу следует из задачи 4.3. Рассмотрим функцию

$$v(z) = \mathtt{Re}(\ln(z-\xi)) = \ln|z-\xi|.$$

При $\xi \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$, она гармонична на D. Поэтому, согласно уже доказанной части теоремы

$$\oint\limits_{\partial D} \{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\} ds = 0.$$

Пусть теперь $\xi \in D$. Рассмотрим окрестность $U_\rho = \{z \in \mathbb{C} || z-\xi| < \rho\} \subset D$ и область $D_\rho = D \setminus \bar{U}_\rho$. Тогда $\xi \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}_\rho$ и из только что доказанного утверждения следует, что

$$\oint\limits_{\partial D_\rho} \{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\}ds = 0.$$

Кроме того, $\partial D = \partial D_\rho \cup \partial U_\rho$. Таким образом,

$$\oint\limits_{\partial D}\{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\}ds = \oint\limits_{\partial U_\rho} u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi|ds - \oint\limits_{\partial U_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|ds.$$

С другой стороны, $\ln|z-\xi| = \ln\rho$ на ∂U_ρ. Следовательно, последний интеграл равен 0, согласно уже доказанной первой формуле теоремы.

Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| = \frac{\partial}{\partial r}\ln r|_{r=\rho} = \frac{1}{\rho}.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{\partial D}\{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\}ds = \frac{1}{\rho}\oint\limits_{\partial U_\rho} u(z)ds.$$

Левая часть равенства не зависит от ρ, откуда,

$$\oint\limits_{\partial D}\{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\}ds = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}\oint\limits_{\partial U_\rho} u(z)ds = 2\pi u(\xi) = \frac{1}{\rho}\oint\limits_{\partial U_\rho} u(z)ds.$$

□

4.2. **Функция Грина.**

Определение 4.2. *Функцией Грина $G = G_D$ в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется функция $G(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln|z-\xi| + g(z,\xi)$ на $\overline{D}\times\overline{D}$, где*

- *$G(z,\xi) = G(\xi,z)$ и $G(z,\xi') = 0$ при любых $z \in D$ и $\xi' \in \partial D$;*
- *функция $g(z,\xi)$ непрерывна в $D \times D$ и непрерывна по ξ в $\overline{D}$ при любом $z \in D$*
- *функция $g(z,\xi)$ гармонична по z при любом $\xi \in D$ и гармонична по ξ при любом $z \in D$.*

Задача 4.4. *Доказать, что существует не более одной функции Грина.*

Для связной односвязной области, ограниченной жордановыми кривыми, функция Грина существует и выражается через биголоморфное отображение на единичный диск $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} || z| < 1\}$, существующее согласно теореме Римана.

Теорема 4.3. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — связная односвязная область, ограниченной жордановыми кривыми. Рассмотрим ее биголоморфное отображение $w : D \to \Lambda$ на единичный диск. Положим*

$$W(z,\xi) = \frac{w(z) - w(\xi)}{1 - w(z)\overline{w(\xi)}}.$$

Тогда

$$G(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln|W(z,\xi)|$$

— *функция для Грина области D.*

Proof. Зафиксируем произвольную точку $\xi \in D$ и рассмотрим

$$w_\xi(z) = W(z,\xi)$$

как функцию от $z \in D$. Эта функция конформно отображает область $D = \{z\}$ на диск Λ и переводит точку $z = \xi$ в 0. В частности,

$$w_\xi(z) = w_\xi(\xi) + (z-\xi)w'_\xi(\xi) + (z-\xi)o(1), \quad \text{где} \quad w_\xi(\xi) = 0, w'_\xi(\xi) \neq 0.$$

Таким образом, функция

$$\frac{w_\xi(z)}{z-\xi}$$

голоморфна и не обращается в 0. Следовательно, функция

$$\ln \frac{w_\xi(z)}{z-\xi}$$

голоморфна и функция

$$g(z,\xi) = G(z,\xi) - \frac{1}{2\pi}\ln|z-\xi| = \frac{1}{2\pi}\ln|\frac{W(z,\xi)}{z-\xi}| = \frac{1}{2\pi}\ln|\frac{w_\xi(z)}{z-\xi}| = \frac{1}{2\pi}\mathtt{Re}\ln\frac{w_\xi(z)}{z-\xi}$$

гармонична по z при любом $\xi \in D$. Ее симметрия $G(z,\xi) = G(\xi,z)$ следует из $|W(\xi,z)| = |W(z,\xi)|$. Непрерывность по паре переменных (z,ξ) на $D \times D$ следуют из $w_\xi(z) = W(z,\xi)$. Кроме того, согласно теореме о соответствии границ 3.10 функция $w_\xi(z)$ непрерывна на замыкании $\overline{D}$ и $|w_\xi(\partial D)| = 1$, откуда

$$G(\partial D,\xi) = 0.$$

□

Доказанную теорему можно эффективно использовать для вычисления функции Грина в простых областях. В частности:

Для единичного диска Λ тождественное отображение $w(z) = z$ порождает $W(z,\xi) = \frac{(z-\xi)}{1-z\bar{\xi}}$ и функцию Грина

$$G_\Lambda(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z-\xi|}{|1-z\bar{\xi}|}.$$

Для правой полуплоскости $H = \{z \in \mathbb{C}|\mathtt{Re}z > 0\}$ отображение $w(z) = \frac{z-1}{z+1}$ переводит H в Λ и порождает функцию Грина

$$G_H(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln|\frac{z-\xi}{z+\bar{\xi}}|.$$

4.3. **Задача Дирихле.**

Определение 4.3. *Задача Дирихле для области D состоит в отыскании функции u, гармонической в области D и непрерывной на замыкании $\bar{D}$ по ее (ограниченному, непрерывному) значению $u|_{\partial D} = \varphi$ на граничном контуре.*

Задача 4.5. *Доказать, что задача Дирихле имеет не более одного решения.*

Лемма 4.1. *Пусть $G(z,\xi) = G_D(z,\xi)$ — функция Грина в области D и $u(z)$ — гармоническая функция на D. Тогда*

$$u(z) = \oint\limits_{\xi\in\partial D} u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}G(z,\xi)ds.$$

Proof. Положим $r = |z-\xi|$. Рассмотрим

$$G(z,\xi) = \frac{\ln r}{2\pi} + g(z,\xi).$$

Согласно теореме 4.2,

$$2\pi u(z) = \oint\limits_{\xi\in\partial D} \{u(\xi)\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\ln r\}ds$$

и

$$\oint\limits_{\xi\in\partial D} \{u(\xi)\frac{\partial g}{\partial n}(z,\xi) - g(z,\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\}ds = 0,$$

при $z \in D$.

Таким образом

$$\oint\limits_{\xi\in\partial D} \{u(\xi)\frac{\partial G}{\partial n}(z,\xi) - G(z,\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\}ds = u(z).$$

Кроме того, $G(z,\xi) = 0$ при $\xi \in \partial D$. □

Задача 4.6. *Пусть функция φ непрерывна на ∂D. Тогда функция*

$$u(z) = \oint\limits_{\xi\in\partial D} \varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial n}G(z,\xi)ds$$

гармонична на D.

Найденные функции Грина для простых областей позволяют найти их нормальные производные по ξ.

Задача 4.7. *Доказать, что для правой полуплоскости H задачу Коши решает формула*

$$u(x+iy) = u(z) = \oint\limits_{\xi\in\partial H} \varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial\partial n}G_H ds = \frac{x}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(i\eta)d\eta}{(y-\eta)^2+x^2}.$$

Теорема 4.4. *Пусть $G(z,\xi) = G_D(z,\xi)$ — функция Грина в области D с жордановой границей. Тогда функция*

$$u(z) = \oint\limits_{\xi\in\partial D} \varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial n}G(z,\xi)ds$$

решает задачу Дирихле для D.

Proof. Для правой полуплоскости H нужное утверждение следует из задачи 4.7. Согласно задаче 4.2 и теореме Каратеодори о соответствии границ отсюда следует, что задача Дирехле разрешима для любой области D с жордановой границей. Согласно лемме 4.1 это решение удовлетворяет соотношению

$$u(z) = \oint\limits_{\xi\in\partial D} u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}G(z,\xi)ds = \oint\limits_{\xi\in\partial D} \varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial n}G(z,\xi)ds.$$

□

Задача 4.8. *Доказать, что формула Пуассона для единичного диска* Λ

$$u(re^{i\psi}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\psi)}\varphi(e^{i\theta})d\theta.$$

Задача 4.9. *Найти формулы Шварца для диска*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\mathbf{Re}F(Re^{i\theta})d\theta + iC \quad (|z|<R)$$

и верхней полуплоскости,

$$F(z) = \frac{x}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{Re}F(i\eta)}{(i\eta-z)}d\eta + iC,$$

восстанавливающие голоморфную функцию по значению ее вещественной части на границе.

5. Введение в римановы поверхности.

5.1. **Римановы поверхности.** Риманова поверхность аналитической функции уже возникала у нас как многообразие на котором аналитическая функция представляется как отображение в сферу Римана. Эта поверхность получается "склейкой" областей комплексной плоскости с помощью биголоморфных отображений. Такой взгляд на эту конструкцию приводит к более общему определению.

Определение 5.1.
- *Голоморфной картой на топологической поверхности* S *называется семейство пар* $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ *состоящая из открытого и односвязного подмножества* $U_\alpha\subset S$ *и гомеоморфизма* $f_\alpha : U_\alpha\to\mathbb{C}$;
- *Голоморфным атласом на топологической поверхности* S *называется семейство карт* $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ *таких, что* $\bigcup U_\alpha = S$, *и* $\varphi_\beta\varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ *— голоморфные функции.*
- *Голоморфные атласы на поверхности* S *называются эквивалентными, если их объединение тоже голоморфный атлас.*
- *Класс эквивалентности голоморфных атласов на* S *называется комплексной структурой. Поверхность с комплексной структурой называется римановой поверхностью.*

Для завершения описания категории римановых поверхностей нам осталось описать морфизмы между ними. Это голоморфные отображения в следующем смысле

Определение 5.2. *Рассмотрим римановы поверхности P и Q, заданные голоморфными атласами $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ соответственно. Отображение $f : P \to Q$ называется голоморфным, если $\psi_\beta f \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \to \psi_\beta(V_\beta)$ голоморфны при $U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) \neq \emptyset$. Обратимые голоморфные отображения римановых поверхностей называются (биголоморфными) изоморфизмами.*

Таким образом, мероморфные функции на римановой поверхности — это ее голоморфные морфизмы в сферу Римана.

Задача 5.1. *Доказать, что определение голоморфного отображения не зависит от выбора голоморфных атласов в классах эквивалентности, определяющих римановы поверхности.*

Пусть $f : P \to Q$ — голоморфное отображение римановых поверхностей, $p \in P$, $q = f(p)$. Рассмотрим локальные карты $\{(U, z)\}$ и $\{(V, w)\}$ такие, что $p \in U$, $q \in V$ и $z(p) = w(q) = 0$. Тогда в малой окрестности нуля голоморфная функция $h = wf(z^{-1}) : z(U) \to w(V)$ представляется в виде $h(z) = z^n \omega(z)$, где $\omega(0) \neq 0$. Число $\deg_p f = n$ называется *степенью ветвления отображения f в точке p.*

Задача 5.2. *Докажите, что степень ветвления отображения f в точке p не зависит от выбора локальных карт $\{(U, z)\}$ и $\{(V, w)\}$. Докажите, что эти локальные карты можно выбрать таким образом, чтобы $h(z) = z^{\deg_p f}$.*

Точка $p \in P$ называется *критической точкой* или *точкой ветвления* голоморфного отображения f, если $\deg_p f > 1$. Точка $q \in Q$ называется *критическим значением* голоморфного отображения f, если прообраз $f^{-1}(q)$ имеет хотя бы одну критическую точку.

5.2. **Формула Римана-Гурвица.**

Компактные римановы поверхности представляют особый интерес. Топологический тип связной компактной поверхности полностью определяется ее родом.

Задача 5.3. *Докажите, что образ голоморфного отображения $f : P \to Q$ компактной римановой поверхности P является тоже компактной римановой поверхностью, число критических точек отображения f конечно и ограничение f на достаточно маленькую окрестность некритической точки является гомеоморфизмом.*

Лемма 5.1. *Пусть $f : P \to Q$ — голоморфное отображение компактных римановых поверхностей и $V \subset Q$ — связная односвязная область, не содержащая критических значений отображения f. Тогда прообраз $f^{-1}(V)$ распадается на конечное число компонент связности, на любой из которых отображение f порождает гомеоморфизм.*

Proof. Рассмотрим компоненту связности $U \subset P$ прообраза $f^{-1}(V)$. Докажем, что $f(U) = V$. Рассмотрим точки $x, y \in V$, где $x \in f(U)$. Рассмотрим соединяющий их отрезок без самопересечений $l \subset V$. Множество $\tilde{l} = f^{-1}(l) \cap U \subset P$ замкнуто ввиду компактности поверхности P. Следовательно, замкнутым будет и множество

$s = f(\tilde{l}) \subset l$. Кроме того, ограничение f на $\tilde{l}$ открыто ввиду отсутствия критических точек. Таким образом s открыто как подмножество отрезка l. Следовательно, $s = l$, $y \in f(U)$ и $f(U) = V$.

Предположим, что существуют $p_1 \neq p_2 \in U$ такие, что $f(p_1) = f(p_2)$. Рассмотрим линию $r \subset U$, соединяющую p_1 и p_2. Ее образ $f(r) \subset V$ образует замкнутый контур, гомотопный точке в виду односвязности V. Поднятие этой гомотопии на U стягивает в точку линию r, что невозможно в виду $p_1 \neq p_2$. Следовательно, ограничение $f|_U : U \to V$ является гомеоморфизмом.

Отсюда следует, в частности, что число компонент связности прообраза $f^{-1}(V)$ совпадает с числом прообразов точки $q \in V$, которое конечно ввиду компактности поверхности P. □

Лемма-определение 5.1. *Пусть $f : P \to Q$ — голоморфное отображение компактных римановых поверхностей. Тогда число прообразов $|f^{-1}(q)|$ одинаково для всех не критических значений $q \in Q$ и называется степенью $\deg f$ отображения f.*

Proof. Рассмотрим не критические значения $q_1, q_2 \in Q$ и содержащую их связную односвязную область V без критических значений. Тогда, согласно предыдущей лемме, в каждой компоненте связности прообраза $f^{-1}(V)$ лежит ровно один прообраз из $f^{-1}(q_i)$. Следовательно, число прообразов $|f^{-1}(q_i)|$ совпадает с числом компонент связности прообраза $f^{-1}(V)$. □

Задача 5.4. *Рассмотрим голоморфное отображение компактных римановых поверхностей $f : P \to Q$. Доказать, что $\deg f = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \deg_p f$ для любой точки $q \in Q$.*

Теорема 5.1. *(Формула Римана-Гурвица) Пусть $f : P \to Q$ — голоморфное отображение степени $n = \deg f$ компактной связной римановой поверхности P рода g_P на компактную связную риманову поверхность Q рода g_Q. Пусть $p_1, ..., p_k \in P$ — множество критических точек f и $n_i = \deg_{p_i} f$. Тогда $g_P = n(g_Q - 1) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) + 1$.*

Proof. Триангулируем поверхность Q так, чтобы вершины триангуляции включали все критические значения $q_1, \dots, q_s$. Пусть эта триангуляция T_Q состоит из F_Q граней, E_Q ребер и V_Q вершин. Прообраз этой триангуляции образует триангуляцию T_P поверхности P из F_P граней, E_P ребер и V_P вершин. На гранях и ребрах отображение f — гомеоморфизм и значит $F_P = nF_Q$, $E_P = nE_Q$.

Пусть в вершину $q \in Q$ триангуляции перешли точки $h_1, \dots, h_r \in P$ и $n_1^q, \dots, n_r^q$ степени ветвления f в этих точках. Тогда $n = \sum\limits_{i=1}^{r} n_i^q$ и $r = n - \sum\limits_{i=1}^{r}(n_i^q - 1)$. Значит общее число вершин триангуляцию T_P, перешедших во все вершины M триангуляции T_Q равно

$$V_P = \sum_{q \in M}(n - \sum_{i=1}^{r}(n_i^q - 1)) = nV_Q - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1).$$

Сопоставим теперь эйлеровы характеристики поверхностей P и Q. Тогда

$$2 - 2g_Q = \chi(Q) = F_Q - E_Q + V_Q$$

и

$$2-2g_P=\chi(P)=F_P-E_P+V_P=nF_Q-nE_Q+nV_Q-\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)=n(2-2g_Q)-\sum_{i=1}^{k}(n_i-1).$$

Следовательно $g_P=n(g_Q-1)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)+1$. $\square$

5.3. **Мероморфные функции и дифференциалы.** Голоморфное отображение $f: P\to\overline{\mathbb{C}}$ на сферу Римана $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\infty$ называется *мероморфной функцией. Нулём функции f порядка k* называется точка $p\in P$ такая что $f(p)=0$ и $\deg_p f=k$. *Полюсом функции f порядка $-k$* называется точка $p\in P$ такая что $f(p)=\infty$ и $\deg_p f=k$.Полюс порядка 1 называется *простым.*

Задача 5.5. *Докажите, что множество мероморфных функций на связной римановой поверхности P образует поле $\mathcal{M}(P)$*

Мероморфный дифференциал на римановой поверхности P определяется семейством мероморфных функций $\{f_\alpha : U_\alpha\to\mathbb{C}|\alpha\in\mathcal{A}\}$ на локальных картах $\{(U_\alpha,z_\alpha)\}$ таким, что $\frac{f_\alpha}{f_\beta}=(z_\beta z_\alpha^{-1})'_{z_\alpha}$ на $U_\alpha\bigcap U_\beta$. Отвечающий этому семейству функций мероморфный дифференциал имеет вид $f_\alpha dz_\alpha$ в любой локальной карте на P. Нетрудно видеть, что мероморфные дифференциалы (как и мероморфные функции) образуют векторное пространство над полем комплексных чисел.

Задача 5.6. *Доказать, что определение мероморфного дифференциала зависит лишь от римановой поверхности. Другими словами, для каждого эквивалентного голоморфного атласа локальных карт $\{(V_\beta,w_\beta)|\beta\in\mathcal{B}\}$ существует однозначно определенный голоморфный дифференциал $h_\alpha dw_\alpha$ такой что $\frac{f_\alpha}{h_\beta}=(w_\beta z_\alpha^{-1})'_{z_\alpha}$ на $U_\alpha\bigcap V_\beta$.*

Нулём мероморфного дифференциала $\{f_\alpha dz_\alpha\}$ порядка k называется точка $p\in P$, где f_α имеет 0 порядка k. $f(p)=0$ и $\deg_p f=k$. *Полюсом мероморфного дифференциала $\{f_\alpha dz_\alpha\}$ порядка k* называется точка $p\in P$, где f_α имеет полюс порядка k. Полюс порядка 1 называется *простым.* Мероморфный дифференциал без полюсов называется *голоморфным дифференциалом.*

Задача 5.7. *Доказать, что множество полюсов мероморфного дифференциала и их порядки не меняются при замене голоморфного атласа локальных карт на эквивалентный.*

Теорема 5.2. *Пусть P — произвольная Риманова поверхность рода g. Тогда: 1) на P существует ровно g линейно независимых голоморфных дифференциалов; 2) для любой точки $p\in P$ и целого $k>1$ существует мероморфный дифференциал с единственным полюсом порядка k в точке p; 3) для любой пары точек $p_1\neq p_2\in P$ существует мероморфный дифференциал, имеющий в точках p_1 и p_2 полюса первого порядка и не имеющий других полюсов.*

Эта замечательная и очень важная теорема явилась одним из главных достижений математики конца 19 века. В ее доказательстве приняли участие Риман, Вейерштрасс, Пуанкаре, Клейн, Гильберт, Г.Вейль, П.Кебе. Все существующие доказательства этой теоремы очень трудоемки и мы не будем доказывать ее в этом курсе.

Задача 5.8. *Доказать, что дифференциал, описанный в пункте 2), представляется в виде* $(\frac{1}{z^k} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i)dz$ *для некоторой локальной карты* z *в окрестности точки* p.

5.4. **Плоские алгебраические кривые.** Пусть $F(z,w)$ — многочлен от двух переменных. Множество точек $P_F = \{((z,w) \in \mathbb{C}|F(z,w) = 0\}$ называется *плоской аффинной комплексной алгебраической кривой.* Для плоской аффинной комплексной алгебраической кривой выполняется голоморфный аналог теоремы о неявной функции.

Теорема 5.3. *Пусть* $F(z_0,w_0) = 0$ *и* $\frac{\partial F}{\partial w}(z_0,w_0) \neq 0$. *Тогда в окрестности точки* z_0 *существует и единственна однолистная голоморфная функция* $w = w(z)$ *такая что* $w_0 = w(z_0)$ *и* $F(z,w(z)) = 0$.

Proof. Пусть $z = x+iy$, $w = u+iv$, $F = f+ig$. Если рассматривать функцию $F(z_0,w)$ как отображение $(u,v) \mapsto (f,g)$, то ее якобиан в точке $w_0 = (u_0,v_0)$ равен

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & -\frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 = \left|\frac{\partial F}{\partial w}\right|^2$$

и, следовательно, не равен 0 в точке w_0. Поэтому, согласно теореме о неявном отображении, в окрестности точки z_0 существуют функции

$$u(z) = u(x,y), \quad v(z) = v(x,y), \quad w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y),$$

порождающие взаимно-однозначное отображение $(x,y) \mapsto (u,v)$ и такие что $F(z,w(z,\bar{z})) = F(z,w(x,y)) = 0$. Кроме того

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}.$$

Неравенство $\frac{\partial F}{\partial w} \neq 0$ влечет $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$. □

Следствие 5.1. *В окрестности точки* (z_0,w_0), *где* $\frac{\partial F}{\partial w}(z_0,w_0) \neq 0$, *отображение* $(z,w(z))) \mapsto z$ *задает локальную карту на* P_F. *Множество всех таких карт образует голоморфный атлас на множестве* $P_F - \Sigma_w$, *где* $\Sigma_w = \{(z,w) \in P_F|\frac{\partial F}{\partial w}(z,w) = 0\}$.

Аналогичным образом определяется голоморфный атлас локальных карт на $P_F - \Sigma_z$, где $\Sigma_z = \{(z,w) \in P_F|\frac{\partial F}{\partial z}(z,w) = 0\}$.

Задача 5.9. *Докажите, что эти атласы эквивалентны на* $P_F - (\Sigma_z \bigcup \Sigma_w)$.

Кривая P_F называется *неособой*, если $|\frac{\partial F}{\partial z}(z,w)| + |\frac{\partial F}{\partial w}(z,w)| > 0$ для всех $\{(z,w) \in \mathbb{C}|F(z,w) = 0\}$. В этом случае построенные выше атласы задают на P_F структуру римановой поверхности. Многообразие P_F, однако не компактно. Ни к одной из ее точек не сходится, в частности, последовательность $\{(z_n,w_n) \in \mathbb{C}|F(z_n,w_n) = 0\}$, где $z_n \to \infty$. Для того чтобы компактифицировать множество P_F рассмотрим множество $c_R = \{z \in \mathbb{C}||z| > R\}$, где число R больше модуля любого критического значения функции $h(z,w) = z$ на P_F. Множество $h^{-1}(c_R)$, без ветвлений накрывает цилиндр c_R. Продолжим это накрытие до отображения $f^{-1}(c_R) \cup D \to c_R \cup \infty$, добавив по точке к каждой компоненте связности прообраза $h^{-1}(c_R)$. Это продолжение вместе с отображением h порождает отображение $\tilde{h} : P \to \overline{\mathbb{C}}$ поверхности $\bar{P}_F = P_F \bigcup D$ на сферу Римана.

Задача 5.10. *Докажите, что поверхность $\bar{P}_F$ компактна и ,если поверхность $\bar{P}_F$ связна, найдите ее род для многочлена F степени d общего положения.*

Задача 5.11. *Докажите, что поверхность $\bar{P}_F$ обладает структурой римановой поверхности относительно которой $\tilde{h}$ — голоморфное отображение.*

Риманова поверхность $\bar{P}_F$ называется *римановой поверхностью многочлена F и алгебраической кривой $F = 0$.*

Задача 5.12. *Докажите, что любая рациональная функция $R(z, w)$ порождает мероморфную функцию на $\bar{P}_F$.*

Как мы только что видели, плоскую аффинную алгебраическую кривую можно рассматривать, как риманову поверхность с выбранной парой мероморфных функций. Эти кривые являются объектами категории, морфизмами которой являются рациональные замены переменных $z \mapsto \tilde{z}(z, w)$, $w \mapsto \tilde{w}(z, w)$. Класс изоморфизма в этой категории уже не зависит от пары функций. Более того, далее мы докажем далее, что эта категория изоморфна категории компактных римановых поверхностей.

Задача 5.13. *Доказать, что формула $\omega = \frac{g(x)dx}{y}$ при любом многочлене $g(x)$ описывает мероморфный дифференциал на гиперэллиптической римановой поверхности $y^2 = f(x)$. Найти полюса этого дифференциала и их порядки. Проиллюстрировать последнюю теорему на примере гиперэллиптических римановых поверхностей.*

5.5. **Поле алгебраических функций.**

Лемма 5.2. *Пусть $f, h : P \to \overline{\mathbb{C}}$ — мероморфные функции на римановой поверхности P и $\deg h = n$. Тогда существуют рациональные функции $r_k : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}} (k = 1, ..., n)$ такие, что $f^n + r_1(h) f^{n-1} + ... + r_{n-1}(h) f + r_n(h) = 0$ на P.*

Proof. Рассмотрим симметрические функции

$$\sigma_k(x_1, ..., x_n) = (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_k}.$$

Для каждого $z \in \overline{\mathbb{C}}$ рассмотрим $h^{-1}(z) = \bigcup p_i(z)$ и положим $r_k(z) = \sigma_k(f(p_1(z)), ..., f(p_n(z)))$. (Это определение корректно, поскольку $\sigma_k(f(p_1(z)), ..., f(p_n(z)))$ не зависит от нумерации точек множества $h^{-1}(z)$.) Рассмотрим

$$r_k(h)(p) = \sigma_k(f(p_1(h(p))), ..., f(p_n(h(p)))).$$

Следовательно, согласно теореме Виета,

$$(f^n + r_1(h) f^{n-1} + ... + r_{n-1}(h) f + r_n(h))(p) = (f(p) - f(p_1(h(p))))(f(p) - f(p_2(h(p))))$$
$$...(f(p) - f(p_n(h(p)))) = 0$$

при $p \in P$, поскольку хотя бы одна из скобок обращается в 0. □

Многочлен $F(y, z)$ называется *приводимым*, если он представляется в виде произведения двух многочленов $F(y, z) = F_1(y, z) F_2(y, z)$ положительной степени с рациональными коэффициентами $F_i(y, z) = f_i^{n_i}(y) z^{n_i} + \dots + f_i^0(y)$. В противном случае $F(y, z)$ называется *неприводимым*.

Задача 5.14. *Докажите, что риманова поверхность приводимого многочлена не связна.*

Теорема 5.4. *Пусть $h : P \to \overline{\mathbb{C}}$ — мероморфная функция степени n на связной римановой поверхности P. Тогда существуют мероморфная функция $f : P \to \overline{\mathbb{C}}$ и неособый неприводимый многочлен $F(y, z)$ такие, что $F(f, h) = 0$ на P.*

Proof. Рассмотрим некритическое значение $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, то есть $h^{-1}(z_0) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} p_i$, где $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$. Функция h порождает локальную карту z_i в окрестность точки p_i, где $h(p) = (z_i(z) - z_0)$. Рассмотрим мероморфный дифференциал ω_i, голоморфный вне p_i и такой, что

$$\omega_i = (\frac{1}{(z_i - z_0)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} (z_i - z_0)^n) dz_i \quad \text{в окрестности точки} \quad p_i.$$

Рассмотрим мероморфную функцию

$$f(p) = (h(p) - z_0)^2 (c_1 \frac{\omega_1}{dh} + ... + c_n \frac{\omega_n}{dh}), \quad \text{где} \quad c_i \neq c_j.$$

Тогда точки p_i некритические и $f(p_i) = c_i$. Рассмотрим, существующий согласно предыдущей лемме, многочлен $F(y, z)$ такой что $F(f, h) = 0$ на P. Этот полином неособый для набора чисел $\{c_i\}$ общего положения.

Докажем ,что многочлен $F(y, z)$ неприводим. Пусть $F = F_1 F_2$, где $F_1(y, z)$ и $F_2(y, z)$ — многочлены положительной степени по z, коэффициенты которых являются рациональными функциями от y. По построению, $F(f(p_1), h(p_1)) = 0$. Предположим, что $F_1(f(p_1), h(p_1)) = 0$. В окрестности точки p_1 рассмотрим локальные карты, порожденные функциями h и f. В окрестности точки $c_1 = f(p_1)$ рассмотрим голоморфную функцию перехода между локальными картами $H = hf^{-1}$. Тогда $H(f(p)) = h(p)$ и $F_1(w, H(w)) = F_1(f(p), h(p)) = 0$, для $w = f(p)$.

Рассмотрим путь $\Gamma_i \in P$, соединяющий точки p_1 и p_i. Положим $\gamma_i = f(\Gamma_i)$ и рассмотрим аналитическое продолжение функции $H(u)$ вдоль пути γ_i. В результате в окрестности точки $c_i = f(p_i)$ мы получим голоморфную функцию $\tilde{H}(\tilde{u})$ такую что $F_1(\tilde{u}, \tilde{H}(\tilde{u})) = 0$. Следовательно $F_1(c_i, z_0) = F_1(f(p_i), h(p_i)) = 0$ и $\deg_z F_1 = n$. Отсюда следует, что $\deg_z F_2 = 0$ □

Следствие 5.2. *Всякая компактная связная риманова поверхность является римановой поверхностью некоторой плоской аффинной неособый неприводимой комплексной алгебраической кривой.*

Задача 5.15. *Пусть неособый многочлен $F(y, z)$ нельзя представить в виде произведения двух многочленов положительной степени по z, коэффициенты которых являются рациональными функциями от y. Тогда его нельзя представить в виде произведения двух многочленов положительной степени по y, коэффициенты которых являются рациональными функциями от z.*

Теорема 5.5. *Пусть P — риманова поверхность неособый неприводимого многочлена $F(y, z)$ и $g : P \to \overline{\mathbb{C}}$ — мероморфная функция. Тогда существует рациональная функция $R(y, z)$ такая, что $g(p) = R(y(p), z(p))$.*

Proof. Рассмотрим на поверхности P функцию $z : P \to \overline{\mathbb{C}}$ и ее некритическое значение $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Её прообраз $z^{-1}(z_0)$ состоит из попарно различных точек

$\{p_1, \ldots, p_n\}$. Рассмотрим многочлен

$$\Phi(y) = \Phi_{z_0}(y) = F(z_0, y) = (y - y(p_1))...(y - y(p_n)).$$

Этот многочлен вид многочлена по y, коэффициенты которого являются симметрическими функциями от p_i и, следовательно, рационально зависят от $z_0 = z(p_i)$. Кроме того, многочлен $\Phi(y)$ не имеет кратных коней, поскольку в противном случае пара чисел $(y(p_i), z_0) = (y(p_j), z_0)$ описывала бы две различные точки поверхности P,

Таким образом, многочлены $\Phi(y)$ и $\Phi'(y)$ взаимно просты. Следовательно существуют многочлены от y $H(y) = H_{z_0}(y)$ и $L(y) = L_{z_0}(y)$ такие что $H\Phi' + L\Phi = 1$. Более того, алгоритм Евклида, позволяющий найти $H_{z_0}(y)$ и $L_{z_0}(y)$ гарантирует, что коэффициенты многочленов рационально зависят от z_0. Кроме того, $H(y(p_i))\Phi'(y(p_i)) = 1$ и $\Phi'(y(p_i)) = 1$.

Положим

$$G(y) = G_{z_0}(y) = \Big(\frac{g(p_1)}{y - y(p_1)} + ... + \frac{g(p_n)}{y - y(p_n)}\Big)\Phi(y) =$$

$$\Big(\frac{g(p_1)}{y - y(p_1)} + ... + \frac{g(p_n)}{y - y(p_n)}\Big)(y - y(p_1))...(y - y(p_n)).$$

Тогда

$$g(p_i) = G(y(p_i)) = \frac{G(y(p_i))}{\Phi'(y(p_i))} = \frac{H(y(p_i))G(y(p_i))}{H(y(p_i))\Phi'(y(p_i))} = G_{z_0}(y(p_i))H_{z_0}(y(p_i)).$$

Функции G_{z_0} и H_{z_0} являются многочленами с коэффициентами, рационально зависящими от z_0. Таким образом, функция $R(z_0, y) = G_{z_0}(y)H_{z_0}(y)$ рациональна. Кроме того $g(p) = R(y(p), z(p))$, поскольку функции совпадают во всех прообразах $z^{-1}(z_0)$ при всех z_0. □

Рассмотрим алгебру над $\mathbb{C}$, свободно порожденную (мультипликативными) образующими y и z. Ее элементы можно рассматривать как многочлены от (y, z) с комплексными коэффициентами. Каждый многочлен $F(y, z)$ порождает идеал $I(F)$. Из предыдущей теоремы следует.

Следствие 5.3. *Поле $\mathcal{M}(P)$ мероморфных функций на связной римановой поверхности P естественно изоморфно полю $\mathcal{M}(F) = \mathcal{M}/I(F)$, где $F(y, z)$ — неприводимый многочлен, риманова поверхность которого изоморфна P. Идеал $I(F)$ отождествляется при этом с идеалом $I(P)$ многочленов, порождающих на P нулевую функцию.*

Следствие 5.4. *Неособый неприводимый комплексный многочлен $F(x, y)$ порождает связную компактную риманову поверхность $\bar{P}_F$.*

Proof. Предположим, что поверхность $P = \bar{P}_F$ распадается на компоненты связности P_1, P_2. Тогда $P_i = \bar{P}_{F_i}$, где F_1, F_2 — неприводимые неособые многочлены, причём $F_1 \neq F_2$ в виду неособости F. Как уже доказано поле $\mathcal{M}(P_i)$ отождествляется с полем $\mathcal{M}(F_i)$. Идеал $I(F_i)$ совпадает с идеалом многочленов, порождающих на P_i нулевую функцию. Следовательно $I(F) \subset I(F_i)$ и $F = G_iF_i$, где $G_i \in \mathcal{M}(F)$. Таким образом, $F = GF_1F_2$ где $G \in \mathcal{M}(F)$. □

Задача 5.16. *Рассмотрим связные римановы поверхности $P_i = \bar{P}_{F_i}$, где $F_1(y,z), F_2(\tilde{y},\tilde{z})$ — неприводимые неособые многочлены. Тогда, переводящая $F_1(y,z)$ в $F_2(\tilde{y},\tilde{z})$ бирациональная замена переменных $y = y(\tilde{y},\tilde{z})$, $z = z(\tilde{y},\tilde{z})$ порождает морфизм $P_1 \to P_2$ и любой морфизм $P_1 \to P_2$ порождается некоторой такой бирациональной заменой переменных.*

Мы доказали, что категория связных римановых поверхностей изоморфна категории неособых неприводимых многочленов $F(y,z)$ с комплексными коэффициентами, морфизмы которой — это рациональные замены переменных $y = y(\tilde{y},\tilde{z})$, $z = z(\tilde{y},\tilde{z})$. Последняя категория может исследоваться чисто алгебраическими методами. Таким образом, многие геометрические результаты о римановых поверхностях могут быть переписаны в чисто алгебраических терминах. В этой переформулировке многие результаты остаются верными при замене поля комплексных чисел на произвольное алгебраически замкнутое поле, например на поле алгебраических чисел. Утверждения про многочлены с коэффициентами из поля алгебраических чисел описывают свойства целых чисел. Такой подход называется *алгебраической теорией чисел.* Он позволяет разрабатывать теорию чисел с помощью геометрических идей теории римановых поверхностей.

5.6. **Униформизация.** Перейдем теперь к классификации римановых поверхностей. Начнем с односвязных. Тут имеет место замечательная теорема униформизации, анонсированная Риманом и доказанная только через 50 лет (П.Кебе 1908 год)

Теорема 5.6. *Всякая односвязная риманова поверхность изоморфна $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ или $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$.*

Для подмножеств сферы Римана $\mathbb{C}$ это утверждение следует из теоремы Римана. Но общая теорема много сложнее.

Рассмотрим теперь произвольную риманову поверхность P. Рассмотрим ее топологическое универсальное односвязное накрытие $\psi : \tilde{P} \to P$. Это накрытие задает представление поверхности P в виде фактор-поверхности $\tilde{P}/\Gamma$, где Γ — дискретная группа, действующая на $\tilde{P}$ без неподвижных точек. Голоморфный атлас на P порождает голоморфный атлас на $\tilde{P}$ такой, что ψ — голоморфное отображение. Эквивалентные атласы на P порождают при этом эквивалентные атласы на $\tilde{P}$. Отображение ψ определяет, таким образом, на $\tilde{P}$ структуру римановой поверхности, относительно которой ψ — голоморфное отображение, и $\Gamma \in \mathsf{Aut}(\tilde{P})$ (доказать).

Задача 5.17. *Рассмотрим риманову поверхность P_F аналитической функции F, её односвязную накрывающую Λ_F, естественную проекцию $\psi : \Lambda_F \to P_F$ и функцию $f_\Lambda = f_F\psi$ на Λ_F. Докажите, что если $\mathsf{Aut}(P_F) = 1$, то риманова поверхность P_F биголоморфно эквивалентна римановой поверхности Λ_F/Γ, где $\Gamma = \{g \in \mathsf{Aut}(\Lambda) | f_\Lambda g = f_\Lambda\}$.*

Вопрос об изоморфизмах фактор-поверхностей решается следующим образом

Задача 5.18. *Фактор-поверхности не изоморфных односвязных римановых поверхностей не изоморфны. Действующие без неподвижных точек группы $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathsf{Aut}(\tilde{P})$ порождают изоморфные римановы поверхности $\tilde{P}/\Gamma_1$, $\tilde{P}/\Gamma_2$ если* *и только если* Γ_1 *и* Γ_2 *сопряжены в группе* $\mathsf{Aut}(\tilde{P})$*, то есть* $\Gamma_1 = A\Gamma_2 A^{-1}$ *для* $A \in \mathsf{Aut}(\tilde{P})$*.*

Теорема униформизации и задача 5.18 сводит описание римановых поверхностей к описанию классов сопряженности, действующих без неподвижных точек дискретных подгрупп на односвязных униформизирующих поверхностях: сфере Римана, комплексной плоскости и единичном диске.

Задача 5.19. *Докажите, что все автоморфизмы сферы Римана имеют неподвижные точки. Докажите, что действующая без неподвижных точек дискретная группа* Γ *автоморфизмов комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ *порождена одним или двумя параллельными переносами. Докажите, что фактор-поверхность* $\mathbb{C}/\Gamma$ *изоморфна в первом случае плоскости без точки* $\mathbb{C} \setminus 0$*, а во втором — компактной римановой поверхности рода 1.*

Подведем промежуточный итог.

Теорема 5.7. *Всякая риманова поверхность* P *изоморфна* $\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus 0$*, тору* $\mathbb{C}/\Gamma'$*, где* Γ' *— группа, порожденная двумя не коллинеарными параллельными переносами, или изоморфна* Λ/Γ*, где* $\Gamma \subset \mathsf{Aut}(\Lambda) \cong \pi_1(P, p)$ *— дискретная группа, действующая без неподвижных точек.*

5.7. **Модули римановых поверхностей.**

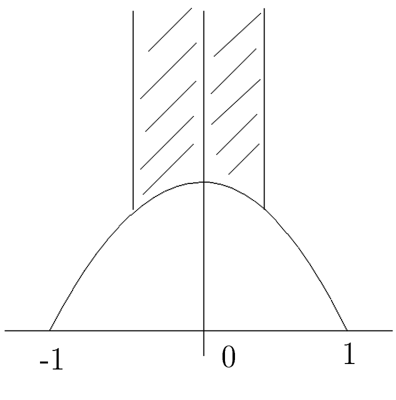
Определение 5.3. *Дискретные подгруппы группы* Γ *группы автоморфизмов единичного диска* Λ *или верхней полуплоскости* H *называются фуксовыми.*

Задача 5.20. *Доказать, что каждая фуксова группа или порождена одним элементом, или некоммутативна.*

Как мы видели, фуксовы группы без неподвижных точек описывают все римановы поверхности с некоммутативной фундаментальной группой. Приведем важный пример фуксовой группы с неподвижными точками.

Пример 5.1. *Следующая группа является фуксовой и называется классической модулярной группой* $\mathtt{Mod} = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\} \cong PSL(2, \mathbb{Z})$*.*

Задача 5.21. *Найти простые образующие и фундаментальную область модулярной группы. Указание, рассмотреть следующую область:*



Множество классов изоморфности римановых поверхностей фиксированного топологического типа называется *пространством модулей.* Эти пространства были введены Риманом и с тех пор интенсивно изучаются. В конце 20 века выяснилось, что они тесно связаны с фундаментальной физикой.

Мы уже знаем, что единственной компактной римановой поверхностью рода 0 является сфера Римана.

Теорема 5.8. *Пространство модулей M_1 компактных римановых поверхностей рода 1 естественно отождествляется с пространством $H/\mathtt{Mod}$.*

Proof. Рассмотрим риманову поверхность $P = \tilde{P}/\Gamma$ рода 1. Тогда $\Gamma \cong \pi_1(P) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Таким образом, согласно задачам 5.20 и 5.19, $\tilde{P} = \mathbb{C}$ и группа $\Gamma \subset \mathsf{Aut}\,\mathbb{C}$ порождена параллельными переносами T_{f_1}, T_{f_2} на векторы $f_1, f_2 \in \mathbb{C}$, где $\frac{f_1}{f_2} \notin \mathbb{R} \cup \infty$. Согласно задаче 5.18, можно считать, что $f_2 = 1$ и $\mathbf{Im} f_1 > 0$, то есть $f_1 \in H$. Более того, согласно задаче 5.18, пары векторов $(1, \tau)$ и $(1, \tau')$, где $\tau, \tau' \in H$ порождают изоморфные римановы поверхности если и только если они порождают сопряженные в $\mathsf{Aut}(\mathbb{C})$ группы параллельных переносов. Это означает, что для некоторого $A \in \mathbb{C}$ образующие $(A, A\tau')$ группы параллельных переносов выражаются через образующие $(1, \tau)$ группы параллельных переносов по формулам $A = c\tau + d$ и $A\tau' = a\tau + b$, где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathtt{SL}(2, \mathbb{Z})$. Таким образом, $\tau' = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$, где a, b, c, d — целые числа. Другими словами, $\tau' = \gamma\tau$, где $\gamma \in \mathtt{Mod}$. □

Задача 5.22. *Пространство модулей римановых поверхностей рода 1 имеет естественную комплексную структуру и изоморфно комплексной плоскости.*

Оказывается, что пространство модулей M_g компактных римановых поверхностей рода $g > 1$ имеют похожую структуру. А именно, они гомеоморфны $\mathbb{R}^{6g-6}/\mathtt{Mod}_g$, где $\mathtt{Mod}_g$ — дискретная группа.