Теории и модели (семинар 5)

1. Даны две теории T, S в сигнатуре L, такие что теория $T \cup S$ противоречива. Докажите, что найдется замкнутая формула φ, такая что $T \vdash \varphi$ и $S \vdash \neg\varphi$.
2. Докажите, что следующие теории не являются счетно категоричными:

   a) $Th(\mathbf{N}, <, 0, 1, =)$

   b) $Th(\mathbf{Z}, <, =)$

   c) $Th(\mathbf{Z}, +, 0, =)$
3. Рассмотрим нестандартную модель M арифметики Пеано PA (т.е. модель, неизоморфную $(\mathbf{N}, +, \bullet, =, 1, 0)$.

   Определим на ней отношение порядка

   $a \leq b := \exists x\,(a + x = b)$.

   и отношение эквивалентности

   $a \approx b :=$

   существует натуральное n (т. е. сумма единиц), такое что ($a = b + n$ или $b = a + n$).

   Классы эквивалентности по $\approx$ называются *галактиками.*

   Докажите следующие свойства M:

   а) Существует наименьшая галактика.

   б) Не существует наибольшей галактики.

   в) Между любыми 2 различными галактиками имеются другие галактики.

   г) Относительно порядка $\leq$, всякая галактика, кроме наименьшей, изоморфна множеству $\mathbf{Z}$ с обычным порядком.
4. Сколько попарно не эквивалентных полных расширений имеет теория плотных линейных порядков в сигнатуре $(<, =)$?
5. Докажите, что теория DLO неограниченных плотных линейных порядков не категорична в мощности континуум.
6. В сигнатуре (R ,=), где R — 2-местный предикатный символ, рассмотрим теорию отношений эквивалентности с бесконечным количеством классов, каждый из которых бесконечен.

   а) Запишите аксиомы этой теории.

   б) Докажите, что эта теория не является конечно аксиоматизируемой.

   в) Докажите полноту этой теории.

Игры Эренфойхта (семинар 6)

1. Пусть $L_n=(\{1,2,...,n\},<,=)$. Докажите, что L_n и L_{n+1} не n-эквивалентны при n=2, 3, 4.
2. Докажите, что нет формулы в сигнатуре (P, =), где P - одноместный предикат, спектр которой состоит из всех четных чисел.

В дальнейших задачах рассматриваются линейные порядки в сигнатуре (<, =).

3. Пусть M, M' - линейные порядки в сигнатуре (<, =), $n > 0$. $x\uparrow$ обозначает интервал, состоящий из всех $y > x$; $x\downarrow$ обозначает интервал, состоящий из всех $y<x$.
   Докажите, что
   $M \equiv_n M'$, если и только если выполнены (1) и (2):
   (1) для любого m из M найдется m' из M', так что $m\uparrow \equiv_{n-1} m'\uparrow$ и $m\downarrow \equiv_{n-1} m'\downarrow$.
   (2) для любого m' из M' найдется m из M, так что $m\uparrow \equiv_{n-1} m'\uparrow$ и $m\downarrow \equiv_{n-1} m'\downarrow$.
4. При каких m Консерватор имеет выигрышную стратегию в игре $EF_m(L_6, L_7)$?
5. При каком наименьшем n Новатор выиграет игру $EF_n(\mathbf{N}, \mathbf{N}+\mathbf{N})$?
6. Докажите, что $L_m \equiv_k L_n$ при $m, n > 3^k$.
7. Докажите, что $L_n \equiv_k \mathbf{N} + \mathbf{Z} + (\mathbf{-N})$ (где $(\mathbf{-N})$ — множество отрицательных целых чисел) при достаточно большом n (и фиксированном k).
8. Докажите, что $\mathbf{N} \equiv \mathbf{N} + \mathbf{Z}$.
9. Докажите, что $\mathbf{Z} \equiv \mathbf{Z} + \mathbf{Z}$.
10. * Докажите, что множество четных чисел не определимо в $(\mathbf{N}, <, =)$. (Указание: рассмотрите соответствующую формулу в $\mathbf{N} + \mathbf{Z}$).

Семинар 7
Машины Тьюринга

(1-12) Напишите программы машин Тьюринга, которые выполняют следующие действия:

1. Замена во входном слове из 0 и 1 все 1 на 0 и наоборот.
2. Перемещение 0 через блок из единиц (т.е. 011...1 ⇒ 11...10).
3. Во входном слове из 0 и 1 перемещение первой буквы в конец слова.
4. Удвоение блока из 1.
5. Обращение слова из 0 и 1 (т. е. переписывание справа налево).
6. Прибавление 1 к числу, записанному в двоичной системе.
7. Вычисление функции $f(x,y) = x + y$ от натуральных аргументов.
8. Вычисление функции $f(x,y) = \max(x,y)$ от натуральных аргументов.
9. Вычисление функции $f(x,y) = |x - y|$ от натуральных аргументов.
10. Вычисление характеристической функции множества четных чисел.
11. Вычисление функции $f(x) = [x /2]$ от натурального аргумента.
12. Преобразование унарной записи натурального числа в его двоичную запись.
13. Дана программа машины Тьюринга, вычисляющей функцию $f(x)$. Как составить программу машины, перерабатывающей вход x (в унарной записи) в выход $x0f(x)$?
14. Существует ли машина Тьюринга, которая по исходной конфигурации на ленте находит крайний правый символ, отличный от пробела?

Вычислимость (семинар 8)

1. Разрешимость множества простых чисел-близнецов.

2. Разрешимость множества четных чисел, которые представимы в виде суммы двух простых (гипотеза Гольдбаха — Эйлера утверждает, что это множество состоит из всех четных чисел >2).

3. Перечислимость множества четных чисел, которые представимы в виде разности двух простых (недоказанная гипотеза утверждает, что это множество состоит из всех четных чисел).

4. Пусть A — разрешимое множество натуральных чисел, f, g — вычислимые тотальные функции $N \to N$. Рассмотрим функцию $h: N \to N$, такую что $h(x) = f(x)$ при $x \in A$; $h(x) = g(x)$ при $x \notin A$. Докажите, что h вычислима.

5. (a) Если A, B - перечислимые множества натуральных чисел, то множество $A+B := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$ перечислимо.

(б) Что можно сказать про множество A+B, если A и B разрешимы?

6. Пусть A — разрешимое множество слов, B н A, причем B и (A A B) перечислимы. Докажите, что B разрешимо.

7. Всякое непустое разрешимое множество — образ вычислимой тотальной (нестрого) монотонной функции.

8. Множество значений вычислимой строго возрастающей последовательности натуральных чисел разрешимо.

9. Если множество A н N_2 разрешимо , и множество pr_2 A конечно, то множество pr_1 A разрешимо.

10. Докажите, что множество всех чисел Фибоначчи разрешимо.

11. Пусть f — вычислимая тотальная функция $N_2 \to N$. Рассмотрим тотальную функцию $g: N \to N$, такую что для любого x, $g(x+1) = f(x,g(x))$. Докажите, что g вычислима.

12. Докажите, что следующие теории в сигнатуре {=} разрешимы:

а) теория бесконечных множеств

б) теория множеств мощности > 5.

в) теория конечных множеств

13. Докажите, что для любой теории T и формулы φ в ее сигнатуре:

$T \vdash \varphi$ тогда и только тогда, когда φ выводится во всех полных расширениях Г.

14. Докажите, что если теория первого порядка T в конечной сигнатуре имеет конечное число полных расширений и все они перечислимы, то T разрешима.

15. Найдите все полные расширения теории плотных линейно упорядоченных множеств (см. задачи семинара 5).

16. Докажите, что теория плотных линейно упорядоченных множеств разрешима.

Вычислимость (семинар 9)

1. Докажите, что существует бесконечно много перечислимых неразрешимых множеств натуральных чисел.

2. Докажите, что для любых $A,B \subset \mathbf{N}$ существует множество $A \oplus B \subset \mathbf{N}$ со следующими свойствами:

(1) $A \leq_m A \oplus B$,

(2) $B \leq_m A \oplus B$,

(3) для любого C, такого что $A \leq_m C$, $B \leq_m C$, выполняется $A \oplus B \leq_m C$.

3. Постройте неперечислимое множество натуральных чисел с неперечислимым дополнением.

4. Докажите, что $K_0 :=$ dom F — неразрешимое множество (F — универсальная

функция) (было на лекции).

5. Докажите, что неразрешима проблема остановки для машин Тьюринга, работающих с натуральными числами, т. е. множество
$\{(\mathrm{Code}(M),n) \mid M$ останвливается на входе $\overline{n}\}$ неразрешимо.

6. Докажите, что множество $\{x \mid \varphi_x (2x)$ определено$\}$ неразрешимо.

7. Докажите, что всякое перечислимое множество натуральных чисел m-сводится к K_0.

8. Докажите, что множество $\{(x,y) \mid \varphi_x = \varphi_y\}$ неразрешимо.

9. Докажите, что $\{x \mid \varphi_x (0)$ определена$\}$ перечислимо, но неразрешимо.

10. Докажите, что $\{x \mid \varphi_x$ нигде не определена$\}$ неперечислимо.

11.Докажите, что $\{x \mid \varphi_x$ всюду определена$\}$ неперечислимо. (Указание: постройте диагональную функцию в предполагаемой нумерации).