

1. Постройте бесконечную последовательность непротиворечивых теорий T_1, T_2, \dots в сигнатуре $(=)$, такую что все теории $T_i \cup T_j$ при $i \neq j$ противоречивы.

2. Постройте непротиворечивую конечно аксиоматизируемую теорию, не имеющую конечных моделей, в сигнатуре $(f, =)$, где f - одноместный функциональный символ.

3. Докажите, что формула $\exists y \forall x \alpha \rightarrow \forall x \exists y \alpha$ выводится в исчислении предикатов.

4. Докажите, что формула $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$ (где P - предикатный символ) не выводится в исчислении предикатов.

5. Докажите, что формула $(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$ (где P, Q - предикатные символы) не выводится в исчислении предикатов.

6. Даны две теории T, S в сигнатуре L , такие что теория $T \cup S$ не имеет моделей. Докажите, что найдется замкнутая формула φ , такая что $T \vdash \varphi$ и $S \vdash \neg \varphi$.

7. Докажите, что теория $\text{Th}(\mathbf{N}, <, 0, 1, =)$ не является счетно категоричной.

8. Докажите, что теория $\text{Th}(\mathbf{Z}, +, 0, =)$ не является счетно категоричной.

9. При каком наименьшем n Новатор выиграет игру $\text{EF}_n((\mathbf{N}, <), (\mathbf{N}, <) + (\mathbf{N}, <))$?

10. Определимо ли множество $\{1\}$ в модели $(\mathbf{R}, +, <, 0, =)$?

11. При каком наименьшем n Новатор выиграет игру $\text{EF}_n((\mathbf{Z}, <), (\mathbf{Q}, <) + (\mathbf{Z}, <))$?

12. Докажите, что арифметика Пеано PA не имеет конечных моделей.

13. Докажите, что теория абелевых групп без кручения не является конечно аксиоматизируемой.

14. Докажите, что теория делимых абелевых групп не является конечно аксиоматизируемой.

15. Докажите, что теория делимых абелевых групп неполна.