Программа экзамена по курсу «Логика и вычислимость»

Часть 1. Логика

1. Сигнатура, термы, формулы. Свободные и связанные вхождения переменных.

2. Свободная подстановка терма вместо переменной.

3. Исчисление предикатов без равенства.

4. Вывод из множества формул. Производные и допустимые правила вывода.

Лемма о транзитивности: производные правила допустимы.

5. Теорема дедукции.

6. Примеры теорем и производных правил.

Введение и удаление конъюнкции, правило силлогизма, правила Бернайса, контрапозиция, монотонность для кванторов, переименование связанной переменной, доказательство «от противного». Взаимодействие кванторов с отрицанием.

7. Предваренная нормальная форма (пнф). Теорема о приведении к пнф в исчислении предикатов (план доказательства).

8. Модель данной сигнатуры. Оценка переменных, значения термов и формул в модели при данной оценке. Зависимость значений термов и формул только от оценки их параметров.

9. Универсальное замыкание. Общезначимые формулы.

10. Теорема корректности исчисления предикатов без равенства: формулировка и план доказательства.

11. Пропозициональная оценка. Значения пропозициональных формул при данной пропозициональной оценке. Общезначимость предикатных аксиом, получающихся из тавтологий.

12. Общезначимость двух предикатных аксиом (Бернайса). Сохранение общезначимости при применении MP и Gen.

13. Теории первого порядка. Модели теорий. Логическое следование.

14. Теорема корректности для теорий.

15. Выводимость в теории равносильна выводимости в какой-нибудь конечной подтеории. Выводимость в конечной теории сводится к выводимости в PC.

16. Непротиворечивые теории. Свойства: в противоречивой теории доказуемы все формулы; если $T \cup \{\alpha\}$ противоречива, то $T \vdash \neg\alpha$.

17. Непротиворечивость теории, имеющей модель.

18. Исчисление предикатов с равенством. Нормальные модели. Теорема корректности для исчисления предикатов с равенством относительно нормальных моделей.

19. Теории первого порядка с равенством; теорема корректности для них. Непротиворечивость теории с равенством, имеющей нормальную модель.

20. Примеры теорий с равенством: теория полугрупп, теория групп, арифметика Пеано, проективная геометрия плоскости.

21. Гомоморфизм и изоморфизм моделей. Преобразование значений термов при гомоморфизме. Сохранение значений формул при сюръективном гомоморфизме.

22. Изоморфность моделей.

23. Элементарная теория модели (Th(M)). Элементарная эквивалентность. Изоморфные модели элементарно эквивалентны.

24. Полные теории. Элементарная эквивалентность моделей полной теории.

25. Сильная категоричность (для теорий с равенством). Конечная аксиоматизируемость. Теорема: если M — конечная модель конечной сигнатуры, то Th(M) конечно аксиоматизируема и сильно категорична. Следствие: совпадение элементарной эквивалентности и изоморфности для конечных моделей конечной сигнатуры.

26. Свойства непротиворечивых полных теорий.

27. Лемма Линденбаума.

28. Свидетели; теории Хенкина. Леммы о свежей константе (формулировка). Лемма Хенкина.

29. Технической леммы о подстановке равных термов в термы и формулы

(формулировка). Модель полной непротиворечивой теории Хенкина, построенная из замкнутых термов.Теорема о существовании модели для непротиворечивой теории без равенства.

30. Теорема Гёделя о полноте для исчисления предикатов без равенства. Совпадение выводимости ($\vdash$) и логического следования ($\models$) для теорий первого порядка без равенства. Следствие: если все модели теории элементарно эквивалентны, то она полна.

31. Теорема Лёвенгейма — Сколема для теорий без равенства.

32. Лемма о нормализации для моделей сигнатуры с равенством.

33. Теорема о существовании нормальной модели для теории с равенством.

34. Теорема Гёделя о полноте для исчисления предикатов с равенством. Совпадение выводимости и логического следования на нормальных моделях для теорий первого порядка с равенством.

35. Теорема Лёвенгейма — Сколема о понижении мощности для теорий с равенством.

36. Теорема Гёделя — Мальцева о компактности.

37. Существование нестандартных моделей арифметики.

38. Теорема Лёвенгейма — Сколема о повышении мощности для теорий с равенством.

39. k-категоричность. Признак полноты Лося — Вота.

40. Теория DLO неограниченных плотных линейных порядков $\aleph_0$-категорична (теорема Кантора).

41. Теория бесконечных множеств в сигнатуре (=) k-категорична для всех бесконечных k.

42. Теория TFDA делимых абелевых групп без кручения в сигнатуре (+,0,=) k-категорична для всех несчетных k.

43. Простые формулы. Приведение каждой формулы к простому виду.

44. Кванторная глубина. Формульная n-эквивалентность кортежей индивидов в моделях.

45. Игры Эренфойхта. Определения: ходы, партии, позиции, условие

выигрыша. Стратегия и выигрышная стратегия Консерватора. Игровая n-эквивалентность.

46. Индуктивное описание игровой эквиавлентности.

47. Теорема Эренфойхта — Фраиссе о совпадении игровой и формульной n-эквивалентности. Доказательство утверждения: из игровой эквивалентности следует формульная. Следствие: признак элементарной эквивалентности моделей.

48. Пример: в сигнатуре (=) все достаточно большие модели n-эквивалентны. Следствие: в этой сигнатуре нет формулы, выделяющей конечные множества четной мощности из всех конечных.

49. Бесконечные игры Эренфойхта. Игровая ω-эквивалентность. Изоморфность ω-эквивалентных счетных моделей.

50. Опровержение необщезначимой формулы с k одноместными предикатами в конечной модели мощности не выше 2^k.

51. Опровержение необщезначимой формулы кванторной глубины n с k одноместными предикатами и равенством в конечной модели мощности не выше $n \cdot 2^k$.

Литература

1. Н.К. Верещагин, А.Х. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2: Языки и исчисления. http://www.mccme.ru

2. Справочная книга по математической логике под ред. Дж. Барвайса. Ч. 1. Теория моделей. М., Наука, 1982.
3. Э. Мендельсон. Введение в математическую логику. М.,1984.
4. А.Н.Колмогоров, А.Г.Драгалин. Математическая логика. Серия "Классический университетский учебник", 2005.

5. В.Н. Крупский, В. Е. Плиско. Математическая логика и теория алгоритмов, Академия, 2013.

6. С.К. Клини. Математическая логика. М., Мир, 1973.
7. W. Rautenberg. A concise introduction to mathematical logic. Springer, 2006.
8. D. Marker. Model theory. An introduction. Springer, 2002.

Часть 2. Вычислимость

1. Определение машины Тьюринга. Конфигурации. Формальное описание работы машины Тьюринга.
2. Определение вычислимой частичной функции, на словах в конечном алфавите и на кортежах натуральных чисел.
3. Теорема о вычислимой нумерации кортежей натуральных чисел и слов (формулировка).
4. Замечание об обращении вычислимой нумерации.
5. Разрешимые множества. Булевы операции над ними.
6. Полуразрешимые множества. Сохранение разрешимости и полуразрешимости для номеров при вычислимой нумерации.
7. Объединение и пересечение полуразрешимых множеств.
8. Примеры разрешимых подмножеств N.
9. 5 эквивалентных определений перечислимости.
9. Образы и прообразы разрешимых и перечислимых множеств при вычислимых функциях.
10. Теорема Поста (критерий разрешимости).
11. Разрешимость множества доказательств в теории 1 порядка с разрешимым множеством аксиом. Перечислимость множества теорем.
12. Разрешимость полной теории с перечислимым множеством теорем.
13. Кодирование машин Тьюринга.
14. Разрешимость множества программ и множества кодов машин Тьюринга.
15. Определение универсальной машины Тьюринга.
16. Описание работы универсальной машины Тьюринга.
18. Теорема об универсальной вычислимой функции (для функций на натуральных числах).
19. Построение перечислимого неразрешимого множества натуральных чисел.
20. Неразрешимость области определения универсальной вычислимой функции. Проблема остановки для машин Тьюринга.
21. Отношение m-сводимости для множеств натуральных чисел; простейшие его свойства.
22. Теорема о главной нумерации для вычислимых функций на натуральных

числах.

23. Индексные множества. Теорема Райса — Успенского.

24. Задание полугруппы образующими и соотношениями. Проблема тождества слов. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой тождества слов.

25. Теорема Чёрча о неразрешимости исчисления предикатов.

Литература

1. Н.К. Верещагин, А.Х. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 3: Вычислимые функции . http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part3-2.pdf

2. В.Н. Крупский, В. Е. Плиско. Математическая логика и теория алгоритмов, Академия, 2013.

3. С.К. Клини. Математическая логика. М., Мир, 1973.

4. У. Роджерс. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., Мир, 1972.

5. Справочная книга по математической логике под ред. Дж. Барвайса. Ч. 3. Теория рекурсии. М., Наука, 1982.