

Ненесекатоющиеся Броуновские пути.

Броуновское движение (винеровский процесс)

это случайный процесс $B_t : \Omega \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$, такой что

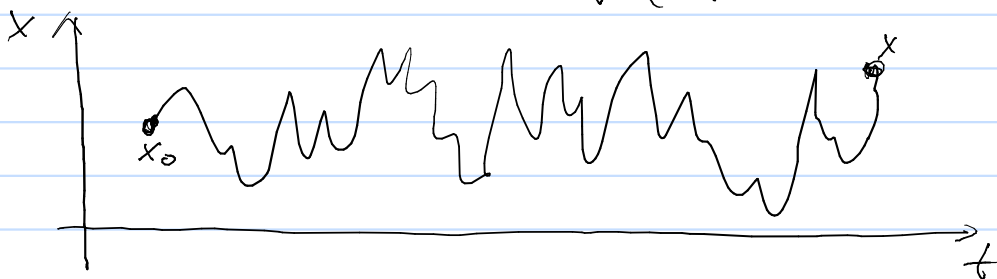
1) $B_0 = 0$ п.н

2) процесс с независимыми приращениями:

$(B_t - B_s)$ и $(B_{t_1} - B_{s_1})$ - независимы при $t > s \geq t_1 > s_1$

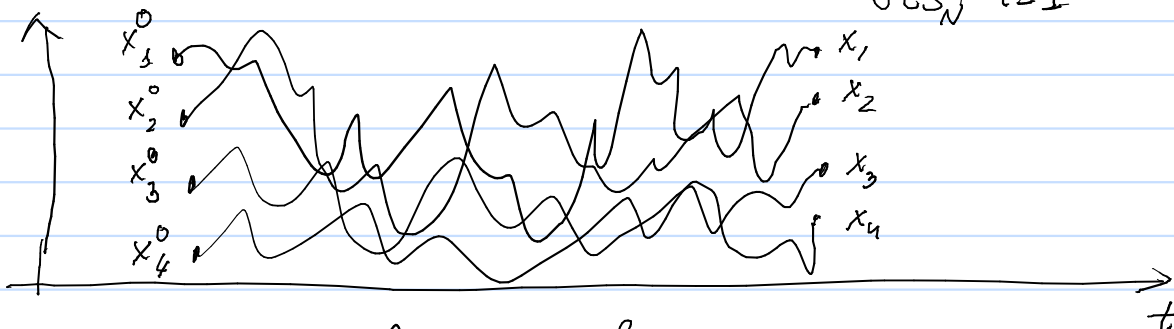
3) приращение гауссово $B_t - B_s \sim \sqrt{t-s} N(0, 1)$.

$$P(B_t \in [x, x+dx] | B_s = x^0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{(x-x^0)^2}{2(t-s)}} dx \doteq f(x-x^0)_{t-s}$$



Какова вероятность того, что N Броуновских путей, стартовавших $x_1^0 < \dots < x_N^0$, в момент t будут в окрестности точек $x_1 < x_2 < \dots < x_N$. Поскольку любой из N путей может добраться до любой из N конечных точек, плотность вероятности этого события дается суммой по всем вариантам:

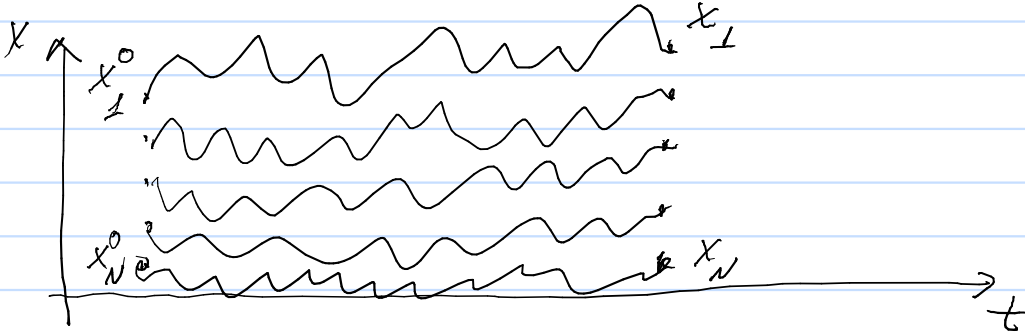
$$f_t(x_1, \dots, x_N | x_1^0, \dots, x_N^0) = \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{i=1}^N f_t(x_{\sigma_i} - x_i^0)$$



Можно ли ввести взаимодействия между Броуновскими путями, так чтобы задача о совместной мимомгментной вероятности перехода всё ещё оставалась решаемой?

Простейший пример - это задача о пересечении путей;

Теми равно вероятности для N броуновских путей дойти из x^0 в x , при условии, что они не могут пересекаться.



Ответ для плотности вероятности $f_t^{NI}(x | x^0)$ такого процесса относительно прост.

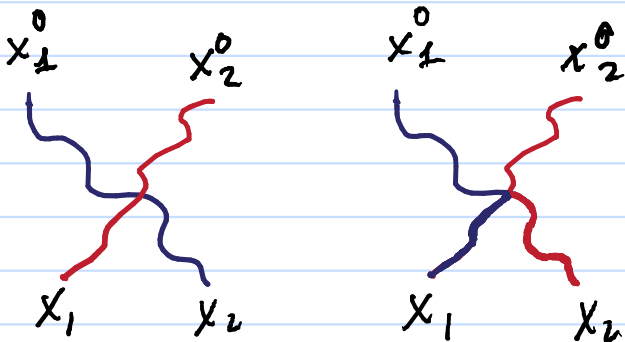
Лемма Карлина - МакГрегора

$$f_t^{NI}(x, x^0) = \det f_t(x_i - x_j^0), \quad 1 \leq i, j \leq N$$

$f_t(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}$ - одномерная плотность вероятности перехода.

Док-во:

Доказательство основано на Марковском св-ве Броуновского движения и простого наблюдения, что любой паре пересекающихся путей можно поставить в соответствие две группы пар путей, которые совпадают с первой, до точки первого пересечения и переставлены после.

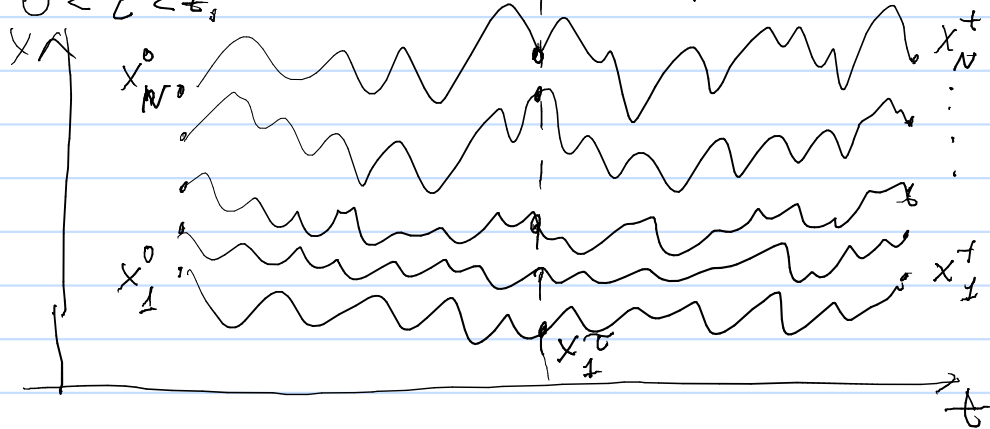


В разложении определителя по переставкам суммированное, соответствует выходящее перестановке σ , дает (с точностью до знака)

вероятность события, при котором пути начинающийся
 ся в x_i^0 заканчивается в x_i^t . Поскольку пересече-
 ния концов двух пар путей описанных выше
 являются элементарной транспозицией, то
 вероятности соответствующих множеств влудят
 с разными знаками и в определителе скомпан-
 ются. Когда число путей больше двух размещение
 определителя обеспечивает выполнение принципа
 виллолле и исключения, оставляющего в сумме только
 вероятности путей без пересечений. \square

Детерминантный точечный процесс.

Пусть N Брауновских путей начинаются в $\underline{x}^0 = [x_1^0, \dots, x_N^0]$
 и без пересечений к моменту времени t достигают точек
 $\underline{x}^t = (x_1^t, \dots, x_N^t)$. Каково распределение частиц в момент
 $0 < \tau < t$,



Ответ в силу марковости вероятность равна
 произведению вероятностей двух отдельных кусков:

$$f_{\tau}(\underline{x}^{\tau} | \underline{x}^0, \underline{x}^t) = \frac{f_{\tau}(\underline{x}^{\tau} | \underline{x}^0) f_{t-\tau}(\underline{x}^t | \underline{x}^{\tau})}{f_t(\underline{x}^t | \underline{x}^0)}$$

$$= \frac{\det_{1 \leq i, j \leq N} (f_{\tau}(x_i^{\tau} - x_j^0)) \det_{1 \leq i, j \leq N} (f_{t-\tau}(x_i^t - x_j^{\tau}))}{\det_{1 \leq i, j \leq N} (f_t(x_i^t - x_j^0))}$$

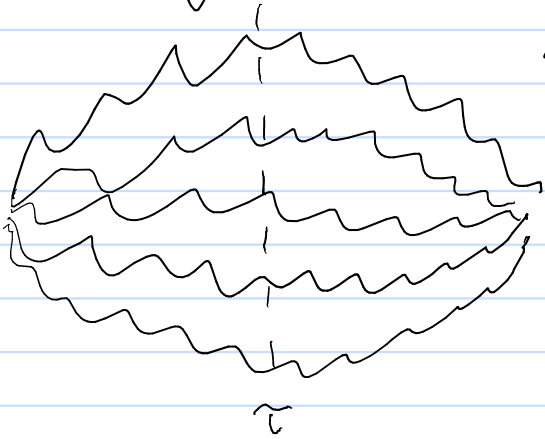
Эта плотность имеет вид $\frac{1}{Z} \det(\varphi_i(x_j^{\tau})) \det(\psi_i(x_j^t))$,

который определяет детерминантный точечный процесс
 в \mathbb{R} с корреляционным ядром:

$$K_N = \sum_{i,j} \varphi_i (H^{-1})_{ij} \varphi_j, \text{ где } H_{ij} = \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle.$$

Задача о форме арбуза (о Броуновских мостах)

N путей стартуют с $\underline{x}^0 = (0, \dots, 0)$ и через время t достигают $\underline{x}^t = (0, \dots, 0)$, не пересекаясь. Какова форма получившегося арбуза?



Чтобы исключить присутствие общих точек с началом до конца, положим

$$x_i^0 = x_i^t = (i-1)\varepsilon.$$

$$f(\underline{x}^t | \underline{x}^t, \underline{x}^0) = \left(\frac{t}{\tau(t-\tau)2\pi} \right)^{N/2} \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(e^{-\frac{(x_i - (j-1)\varepsilon)^2}{2t}} \right) \det_{1 \leq i, j \leq N} \left(e^{-\frac{(x_i - (j-1)\varepsilon)^2}{2(t-\tau)}} \right)$$

$$= \left(\frac{t}{\tau(t-\tau)2\pi} \right)^{N/2} e^{-\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{2t} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-\tau} \right)} e^{-\sum_{j=0}^{N-1} \frac{j^2 \varepsilon^2}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-\tau} \right)}$$

$$\times \det \left(e^{\frac{x_i(j-1)\varepsilon}{t}} \right) \det \left(e^{\frac{x_i(j-1)\varepsilon}{t-\tau}} \right) = \left(\frac{t}{\tau(t-\tau)2\pi} \right)^{N/2} e^{-\frac{t}{2t(t-\tau)} \sum_i x_i^2}$$

$$e^{-\sum_i \frac{j^2 \varepsilon^2}{2}} \det \left(e^{\frac{(i-1)(j-1)\varepsilon^2}{t}} \right)$$

$$\times \prod_{i < j} \left(e^{\frac{x_i \varepsilon}{t}} - e^{\frac{x_j \varepsilon}{t}} \right) \prod_{i < j} \left(e^{\frac{x_i \varepsilon}{t-\tau}} - e^{\frac{x_j \varepsilon}{t-\tau}} \right)$$

разложим по ε в регулярном порядке

$$\prod_{i < j} \left(e^{\frac{(i-1)\varepsilon^2}{t}} - e^{\frac{(j-1)\varepsilon^2}{t}} \right)$$

$$= \left(\frac{t}{\tau(t-\tau)2\pi} \right)^{N/2} e^{-\frac{t}{2t(t-\tau)} \sum_i x_i^2} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2 \left(\frac{\varepsilon^2}{\tau(t-\tau)} \right)^{\frac{N(N-1)}{2}}$$

$$\prod_{i < j} (j-i) \frac{\varepsilon^{N(N-1)}}{t^{\frac{N(N-1)}{2}}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \prod_{i=1}^{N-1} i!} \times \left(\frac{t}{\Gamma(t-\tau)} \right)^{\frac{N^2}{2}} e^{-\frac{t}{2\Gamma(t-\tau)} \sum_i x_i^2} \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2$$

Из распределения видно, что в любой момент τ матрицы с точностью до масштаба распределены как собственные значения матрицы из СМЭ:

$$x_i(\tau) \sqrt{\frac{t}{2\Gamma(t-\tau)}} \sim \lambda_i$$

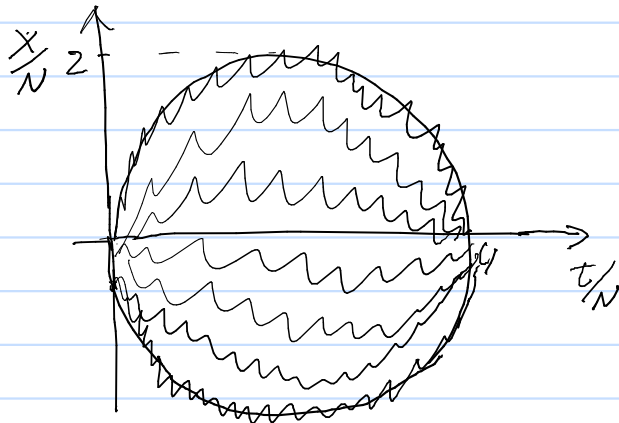
При $N \rightarrow \infty$ $\lambda_i \sim \sqrt{N}$, чтобы длина и ширина арбуза были одного порядка нужно выбрать $t \sim N$, что даёт $x \sim N$.

Пусть $t = 4N$. Как было показано ранее $\lambda_i N^{-1/2}$ концентрируются на отрезке $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ с плотностью $\rho_{sc} = \sqrt{2-x^2}$. В частности по мере максимизации собственного значения

$$\frac{\lambda_{\max}}{\sqrt{N}} \rightarrow \sqrt{2}$$

Следовательно, где при $t/4 = N \rightarrow \infty$ для крайней матрицы мы имеем

$$\frac{x_{\max}(\tau)}{N} \rightarrow \sqrt{\theta(4-\theta)} \quad \theta = \frac{t}{N}$$



Корреляционные ф-ии: $R_n(x_1, \dots, x_n) = \det_{1 \leq i, j \leq n} K(x_i, x_j)$.

$$K_\theta(x, y) = K_{\text{QUE}} \left(x \sqrt{\frac{z}{N\theta(4-\theta)}}, y \sqrt{\frac{z}{N\theta(4-\theta)}} \right) \sqrt{\frac{z}{N\theta(4-\theta)}}, \quad \text{где}$$

$$K_{\text{QUE}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}}}{2^N (N-1)! \sqrt{\pi}} \frac{H_{N-1}(x) H_N(y) - H_{N-1}(y) H_N(x)}{y-x}$$

Из предыдущих лекций имели
Асимптотическое поведение ядра на границе
спектра:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{1/6} K_{\text{GUE}} \left(\sqrt{2N} + \frac{\varphi}{N^{1/6}\sqrt{2}} ; \sqrt{2N} + \frac{\varphi}{N^{1/6}\sqrt{2}} \right) = K_{\text{Airy}}(\varphi, \varphi)$$

$$K_{\text{Airy}}(\varphi, \varphi) := \frac{\text{Ai}(\varphi)\text{Ai}'(\varphi) - \text{Ai}'(\varphi)\text{Ai}(\varphi)}{\varphi - \varphi}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{1/3} K_{\theta} \left(\sqrt{\theta(4-\theta)} \left(N + \frac{\varphi}{2} N^{1/3} \right), \sqrt{\theta(4-\theta)} \left(N + \frac{\varphi}{2} N^{1/3} \right) \right) \sqrt{\frac{\theta(4-\theta)}{2}} = K_{\text{Airy}}(\varphi, \varphi)$$

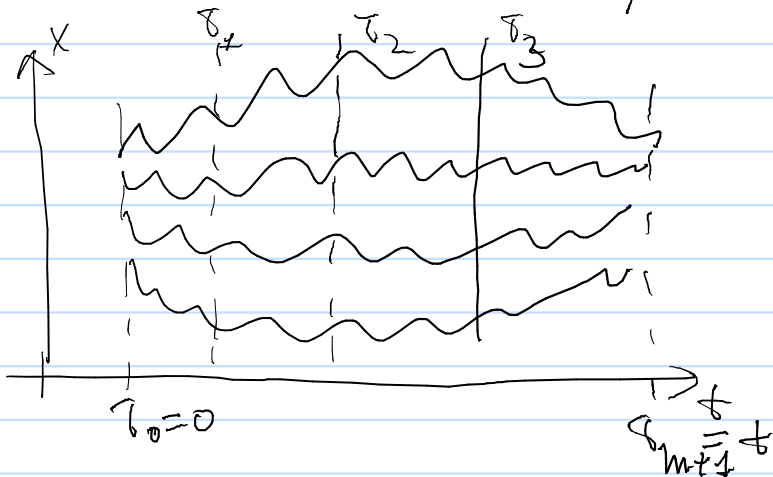
$$X_{\max} \sim \sqrt{\theta(4-\theta)} \left(N + \frac{1}{2} \chi_{\text{TW}} N^{1/3} \right), \text{ где}$$

$$\text{или } Z \left(\frac{X_{\max} - N\sqrt{\theta(4-\theta)}}{\sqrt{\theta(4-\theta)} N^{1/3}} \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{ID}} \chi_{\text{TW}_2}$$

$$P(\chi_{\text{TW}} < a) = F_2(a) = \det(1 + K_{\text{Airy}})_{L^2((a, \infty))}$$

Расширенный процесс и многовременные корреляционные функции.

Решим нам арбуз в нескольких
местах в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$.



Обозначим координаты ячеек в момент

$$\tau_i : \underline{x}^i = (x_1^i, \dots, x_n^i)$$

Хотим вычислить многомерные корр. ф-ии в $\mathbb{R} \times \{1, \dots, m\}$.

$$R((x_1, h_1), (x_2, h_2), \dots, (x_k, h_k)) =$$

$$= P(\text{частицы в } [x_1, x_1 + \Delta x_1] \text{ в } \mathcal{D}_{h_1}, [x_2, x_2 + \Delta x_2] \text{ в } \mathcal{D}_{h_2}, \dots)$$

Плотность вероятности:

$$f(\{x_j^i\}) = \frac{1}{Z} \prod_{i=1}^{m+1} \det f_{i-1, i} (x_k^i - x_j^{i-1})$$

Плотность имеет вид:

$$f(\{x_j^i\}) = \frac{1}{Z} \det \Phi_i(x_j^i) \det \Psi_1(x_i^1; x_j^1) \dots \det \Psi_{m-1}(x_i^{m-1}; x_j^{m-1}) \det \Psi_m(x_i^m; x_j^m)$$

Теорема Эйнгард-Мельби: Пусть $Z = \int dx \prod_{i=1}^m (x_i^i < \dots < x_n^i) f(\{x_j^i\}) \neq 0$

Тогда плотность(*) задает детерминантный точечный процесс на $\mathbb{R} \times \{1, \dots, m\}$ с корреляционным ядром

$$K((x; h_1), (y; h_2)) = -\Psi(x, y) + \sum_{j=0}^{m-1} \Psi_k^{h_2}(x) M_{kj}^{-1} \Phi_j^{h_1}(y)$$

$$\Psi^{(h_1, h_2)}(x, y) = \Phi_{n_2 > n_1}^{h_2} * \Phi_{n_1}^{h_1} * \dots * \Phi_{n_2-1}^{h_1}$$

$$\Psi_k^n(x) = \Psi_{k, m}^{n, m} * \Psi_k(x) \quad \Phi_k^n = \Phi_k * \Psi_k^{1, n}$$

$$M_{ij} = \Phi_i^{1, m} * \Psi_j$$

Это утверждение имеет общий характер и может быть доказано, с помощью теоремы Коши-Бине и манипуляций с матрицами.

Мы не приведем более подробные аргументы, основанные на обобщении теоремы Карлин-Макгрегора.

Пусть $X_1(t), \dots, X_n(t)$ - независимые марковские процессы с одинаковыми вероятностями перехода

$$P(s, x; t, E) = P\{X(t) \in E \mid X(s) = s\}, \quad s < t$$

Обозначим $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и $\underline{X}(\underline{u}) = (X_1(u_1), \dots, X_n(u_n))$

Пусть $\{\underline{X}, \underline{s}, \underline{\alpha}\} \rightarrow \{\underline{X}, \underline{t}, \underline{\beta}\}$ - событие в котором

процессы $\underline{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ начинаются в моменты

$\underline{s} = \{s_1, \dots, s_n\}$ в состоянии $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$,

и заканчиваются в моменты $t_1 > s_1, \dots, t_n > s_n$ в состоянии $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ соответственно, т.е.

$$\underline{X}(\underline{s}) = \underline{\alpha}, \quad \underline{X}(\underline{t}) = \underline{\beta}.$$

Теорема. Пусть $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in S_n$ - перестановка чисел $\{1, \dots, n\}$ и $\underline{t}_\sigma = (t_{\sigma_1}, \dots, t_{\sigma_n})$, $\underline{\beta}_\sigma = (\beta_{\sigma_1}, \dots, \beta_{\sigma_n})$.

Тогда

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma P(\{\underline{X}, \underline{s}, \underline{\alpha}\} \rightarrow \{\underline{X}, \underline{t}_\sigma, \underline{\beta}_\sigma\}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma P(\{\underline{X}, \underline{s}, \underline{\alpha}\} \rightarrow \{\underline{X}, \underline{t}_\sigma, \underline{\beta}_\sigma\} \text{ без совпадений}),$$

где без совпадений означает, что никакие две пути в данном событии не проходят через общие точки в общие моменты времени.

Справедливо следующее элементарное утверждение произведений одночленных вероятностей, так что:

$$\sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} Pr(\{\underline{X}, \underline{s}, \underline{\alpha}\} \rightarrow \{\underline{X}, \underline{t}_\sigma, \underline{\beta}_\sigma\}) = \det(p(\alpha_i, s_i; \beta_j, t_j))$$

Вернемся к арбугу. Зафиксируем номера n_1, \dots, n_k
и точки $(x_1, n_1), (x_2, n_2) \dots (x_k, n_k)$,
где номера n_1, \dots, n_k относятся к моментам
времени $\tau_{n_1}, \dots, \tau_{n_k}$.

Попробуем вычислить корреляционную функцию

$$R_k((x_1, n_1), \dots, (x_k, n_k)) = \frac{P(\prod_{i=1}^k \text{есть частица в } [x_i^0, x_i^0 + \Delta x_i] \text{ в } \tau_{n_i})}{\prod_{i=1}^k \Delta x_i}$$

Требуется вычислить вероятность того по броунов-
скому движению начинающиеся в $x_i(0) := x_i^0$
знаменательные в $x_i(t) = x_i^{m+1}$ проходят через
точки (x_i, τ_i) , $i=1, \dots, k$.

Обозначим плотности вероятности переходов (одночастичный):

$$p(x_i^0 \rightarrow (x, 1)) := \varphi_0(x) \quad p((x, m) \rightarrow x_i^{m+1}) := \varphi_0(x)$$

$$p((x, k) \rightarrow (y, k+1)) := \varphi_k(x, y)$$

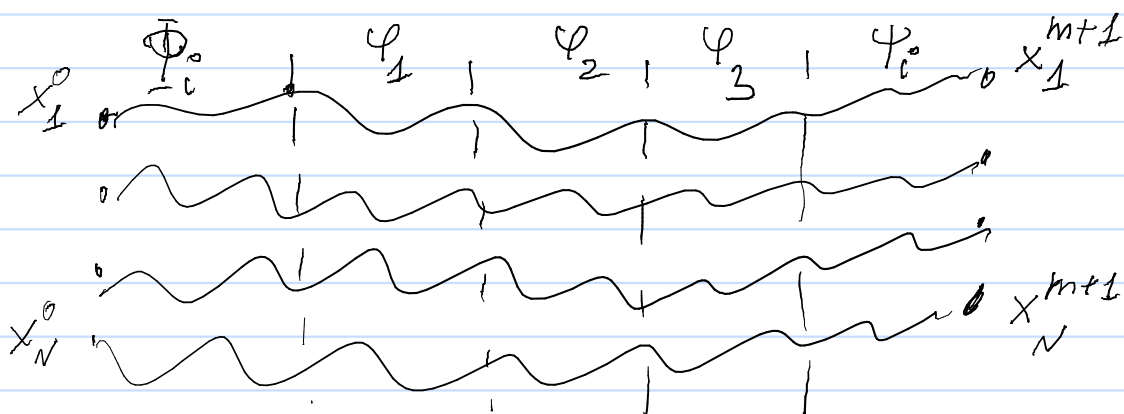
$$p((x, k) \rightarrow (y, e)) = \int_{e > k} \varphi_k(x, z_1) \varphi_{k+1}(z_1, z_2) \dots \varphi_{e-1}(z_{e-1}, y) dz_1 \dots dz_{e-1} =$$

$$\int_{e > k} \varphi_k * \dots * \varphi_{e-1}(x, y) \stackrel{\circ}{=} \varphi^{k, e}(x, y)$$

$$p(x_i^0 \rightarrow (x, e)) = \varphi_0 * \varphi_1 * \dots * \varphi_{e-1}(x) = \varphi_0 * \varphi^{1, e}(x)$$

$$p((x, e) \rightarrow x_i^t) = \varphi_e * \dots * \varphi_m * \varphi_0(x) = \varphi^{e, m} * \varphi_0(x)$$

$$p(x_i^0 \rightarrow x_j^t) = \varphi_0 * \varphi_1 * \dots * \varphi_m * \varphi_0 \stackrel{\circ}{=} M_{ij}$$



$$R_K((x_1, n_1), \dots, (x_k, n_k)) = P((x_1, n_1), \dots, (x_k, n_k) | \bigcap_i \{X_i(0) = x_i^0, X_i(t) = x_i^t\}) =$$

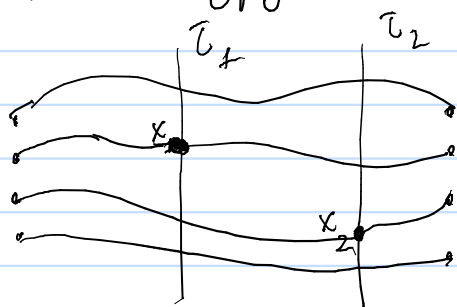
$$= \frac{P((x_1, n_1) \wedge \dots \wedge (x_k, n_k) \wedge \bigcap_i \{X_i(0) = x_i^0, X_i(t) = x_i^{m+1}\})}{P(\bigcap_i \{X_i(0) = x_i^0, X_i(t) = x_i^{m+1}\})}$$

1) Нормированный фактор: по простой теореме К-М

$$Z = P(\bigcap_i \{X_i(0) = x_i^0, X_i(t) = x_i^{m+1}\}) = \det M_{ij}, \text{ где}$$

$$M_{ij} = \Phi_i * \Psi^{1,m} * \Psi_j$$

2) Чтобы вычислить вероятность путей проходящих через $(x_1, n_1), \dots, (x_k, n_k)$, потребуем, чтобы в каждой из этих точек начинался один броуновский путь и заканчивался группой броуновских путей.



Нам нужно вычислить сумму по всем путям из $x_1^0, \dots, x_N^0, (x_1, n_1), \dots, (x_k, n_k)$ в $x_1^{m+1}, \dots, x_N^{m+1}, (x_1, n_1), \dots, (x_k, n_k)$ без пересечения. Составим блочную матрицу:

$$\begin{array}{c|c} x_1^0 & x_1^{m+1} \dots x_N^{m+1} | (x_1, n_1), \dots, (x_k, n_k) \\ \hline \Phi_i * \Psi^{1,m} * \Psi_j = M_{ij} & (\Phi_i * \Psi^{1, n_j^0}) \\ \hline x_N^0 & \dots \\ (x_1, n_1) & (\Psi^{n_i, m} * \Psi_j)(x_i) \\ (x_k, n_k) & \Psi^{n_i, n_j^0} \end{array} = \tilde{M}$$

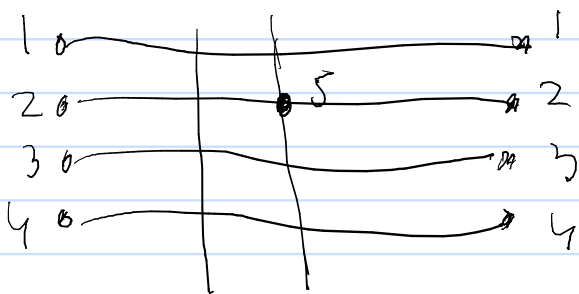
С помощью метода го-полнения Шура (см. лекция 3) можно вычислить определитель блочной матрицы:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det(D - CA^{-1}B)$$

Получим $\frac{\det \tilde{M}}{\det M} = \frac{\det M^{-1} \det M \times \dots}{\det M}$

$$\times \det \left[\varphi^{(n_i, n_j)} - \sum_{1 \leq i', j' \leq k} \left(\varphi^{(n_i, m)} \varphi^{(m, n_j)} \right) (x_{i'}) (M_{e s}^{-1}) \left(\varphi_s \times \varphi^{(n_i, n_j)} \right) (x_{j'}) \right]$$

Мы пришли к определителю $k \times k$ матрицы, элементы которой совпадают с искомым ядром с точностью до знака. Этот определитель стоит в левой части обобщенной теоремы К-М. Посмотрим на знак перестановки в правой части

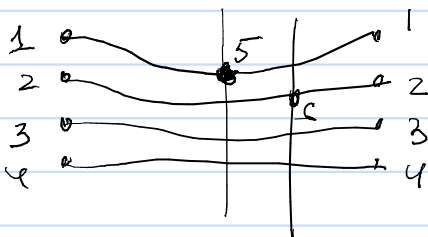


$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{matrix} = (25)(1)(3)(4)$$

знак группы 2

знак $(-1)^{2-1} = -1$

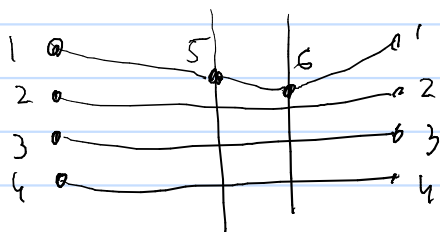
(знак знака группы e) = $(-1)^{e-1}$



$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix} = (15)(26)(3)(4)$$

содержит два знака группы 2

знак $(-1)^2 = 1$



$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 6 & 1 \end{matrix} = (156)(2)(3)(4)$$

sign $\sigma = (-1)^{3-1} = 1$

Нетрудно убедиться, что при введении новых промежуточных точек, начиная с соответственной перестановки исходных N точек, новые точки добавляются в уже существующий цикл. Таким образом все полученные перестановки состоят из N циклов общей группы $N \times k$ и имеют четность $(-1)^k$.
Чтобы получить знак ядра, достаточно умножить матричные элементы на -1

возьмем теперь как и ранее $x_i(0) = x_i(t) = (i-1)\varepsilon$
 Полученное распределение в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$
 имеет вид

$$\mathcal{M}(\{x_j^i\}) = \frac{1}{Z} \times$$

$$\times \prod_{i < j} (x_i^i - x_j^i) e^{-\frac{1}{2\sigma_1} \sum_i (x_i^i)^2} \prod_{k \geq 2} \det e^{-\frac{(x_i^k - x_{i+1}^k)^2}{2(\tau_k - \tau_{k-1})}} \prod_{i < j} (x_i^m - x_j^m) e^{-\frac{1}{2(\tau - \tau_m)} \sum_i (x_i^m)^2} =$$

Пересуммируя строки детерминантов Вандермонда
 можно ввести $\tilde{\Phi}_i(x)$ и $\Psi_i(x)$ в виде

$$\tilde{\Phi}_i(x) = P_{i-1}(x) e^{-\frac{x^2}{2\tau_i}}, \quad \Psi_i(x) = \tilde{P}_{i-1} e^{-\frac{x^2}{2(\tau - \tau_{i-1})}},$$

где $P_{i-1}(x)$ и $\tilde{P}_{i-1}(x)$ - произвольные многочлены
 степени $(i-1)$,

$$\text{и} \quad \varphi_i(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau_i - \tau_{i-1})}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2(\tau_i - \tau_{i-1})}\right)$$

Определим $\tilde{\Phi}_{i+1}^n(y) := \frac{\sqrt{2\pi\tau}}{\sqrt{i!} 2^{i/2}} \left(\frac{\tau - \tau_n}{\tau_n}\right)^{i/2} H_i\left(\frac{y}{\sqrt{2\tau_n(\tau - \tau_n)/\tau}}\right) \frac{e^{-\frac{y^2}{2\tau_n}}}{\sqrt{2\pi\tau_n}}$

$$\text{и} \quad \varphi_{i+1}^s(y) := \frac{\sqrt{2\pi\tau}}{\sqrt{i!} 2^{i/2}} \left(\frac{\tau_s}{\tau - \tau_s}\right)^{i/2} H_i\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau_s(\tau - \tau_s)/\tau}}\right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2(\tau - \tau_s)}}}{\sqrt{2\pi(\tau - \tau_s)}}$$

где $H_i(x)$ - многочлены Эрмита: $\int_{\mathbb{R}} dx e^{-x^2} H_k(x) H_l(x) = \sqrt{\pi} 2^k k! \delta_{k,l}$

Эти Φ -и удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\Phi}_i^n(x) \varphi_{i+1}^{n,k}(x, y) dx = \tilde{\Phi}_i^k(y) \\ \int_{\mathbb{R}} \varphi_{i+1}^{n,k}(x, y) \Psi_i^k(y) dy = \Psi_i^n(x) \end{cases} (*)$$

$$\text{где} \quad \varphi_{i+1}^{n,k}(x, y) = \varphi_n * \dots * \varphi_{k-1} \prod_{k > n} = \frac{\prod_{k > n}}{\sqrt{2\pi(\tau_k - \tau_n)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2(\tau_k - \tau_n)}\right)$$

$$\text{Матрица} \quad M_{ij} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\Phi}_i^{(n)}(x) \Psi_j^{(n)}(x) dx = \delta_{ij} \quad (**)$$

Получим:

$$K_N(x, n_1), (y, n_2) = -\varphi^{n_1, n_2} + \sum_{k=1}^N \Phi_i^{n_2}(x) \Psi_i^{n_1}(y)$$

и

$$R_N((x_1, n_1), \dots, (x_k, n_k)) = \det \left(K_N(x_i, n_i); (x_j, n_j) \right)_{1 \leq i, j \leq k}$$

Распределение верхней части в моменты $\tau_{n_1}, \dots, \tau_{n_k}$

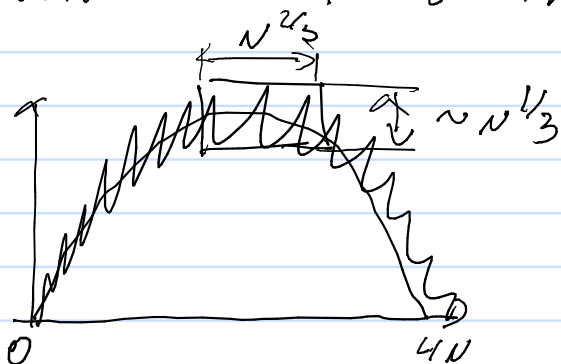
$$P(x_1(\tau_{n_1}) < a_1, \dots, x_k(\tau_{n_k}) < a_k) = \det(1 - \zeta_a K \zeta_a) L^2(\mathbb{R}^k / 1, \dots, k)$$

$$\text{где } \zeta_a(y_1, \dots, y_k) = \prod_{y_i > a_i} 1_{y_i > a_i}$$

$$\det(1 - \zeta_a K \zeta_a) = 1 - \sum_{i=1}^k \int_{a_i}^{\infty} dx K(x, n_i); (x, n_i) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{i_1, i_2=1}^k \int_{a_{i_1}} dx_{i_1} \int_{a_{i_2}} dx_{i_2} \det [K((x_{i_1}, n_{i_1}); (x_{i_2}, n_{i_2})) + \dots]$$

Асимптотики: $t = 4N$



Пусок $T=4N$, $t \approx N$

$$\begin{cases} \delta_i = 2N + u_i N^{2/3} \\ X_i = \sqrt{\delta_i(T-\delta_i)} + s_i N^{1/3} \approx 2N - \frac{u_i^2}{4} N^{1/3} + s_i N^{1/3} \approx X(u_i, s_i) \end{cases}, \quad u_1 < u_2 < \dots < u_m - \text{параметры}$$

$$H_{N-k} \left(\frac{2N + 2N^{1/3}}{\sqrt{2N}} \right) \approx (2N)^{1/4} \sqrt{2^{N-k} (N-k)!} N^{-1/3} e^{\frac{(2N + 2N^{1/3})^2}{4N}} \times \text{Ai} \left(2 + N^{-1/3} \left(k - \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$\Psi_{N-\lambda N^{1/3}}^h(x(u, s)) \approx N^{-1/3} \text{Ai}(s+\lambda) e^{\frac{\lambda^2}{2}} f(s, u)$$

$$\bar{\Phi}_{N-\lambda N^{1/3}}^h(x(u, s)) \approx N^{-1/3} \text{Ai}(s+\lambda) e^{-\frac{\lambda^2}{2}} f^{-1}(s, u)$$

$$f(s, u) = \exp \left[-\frac{u^3}{24} + \frac{su}{2} \right]$$

Получим $N^{1/3} \sum_{k=20}^{N-1} \Psi_{(x)}^{h_2} \bar{\Phi}_{(y)}^{h_1} \rightarrow \int_0^\infty d\lambda \text{Ai}(s_1+\lambda) \text{Ai}(s_2+\lambda) e^{-\frac{\lambda(u_2-u_1)}{2}} \times \frac{f(s_1, u_1)}{f(s_2, u_2)}$

Диффуз. ядро: $N^{1/3} \Phi_{(x_2, y)}^{h_1, s} = \frac{f(s_1, u_1)}{f(s_2, u_2)} \frac{1}{\sqrt{\cos \frac{u_2 - u_1}{2}}} \times$

$$\times \exp \left[-\frac{(s_2 - s_1)^2}{4 \frac{u_2 - u_1}{2}} + \frac{1}{12} \frac{(u_2 - u_1)^3}{2} - \frac{(u_2 - u_1)(s_1 + s_2)}{4} \right]$$

Основн. параметр $\frac{f(s_1, u_1)}{f(s_2, u_2)}$ не гдет выножен

в определении.

Получим утверждение:

Теорема. Пусть
$$\begin{cases} \mathcal{E} = zN + 2uN^{2/3} \\ X = zN - u^2N^{1/3} + SN^{1/3} \end{cases}$$

Пусть в пределе $N \rightarrow \infty$

$$N^{1/3} K_N((x_1, n_1), (x_2, n_2)) \rightarrow K_2(s, u, s', u')_{\mathbb{Z}}$$

$$= - \frac{\mathbb{1}(u' > u)}{\sqrt{u(u-u')}} \exp \left[- \frac{(s'-s)^2}{u(u-u')} + \frac{1}{2} (u'-u)^2 - \frac{(u'-u)(s+s')}{2} \right] +$$

$$+ \int_0^{\infty} d\lambda A_i(s+\lambda) A_i(s'+\lambda) e^{\lambda(u'-u)}$$

Можно показать, что $\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda A_i(s+\lambda) A_i(s'+\lambda) e^{\lambda(u'-u)}$

является коэффициентом при $\mathbb{1}(u' > u)$, поэтому

$$K_2(s, u, s', u') = \begin{cases} \int_0^{\infty} d\lambda A_i(s+\lambda) A_i(s'+\lambda) e^{\lambda(u'-u)}, & u' \leq u \\ - \int_{-\infty}^0 d\lambda A_i(s+\lambda) A_i(s'+\lambda) e^{\lambda(u'-u)}, & u' > u \end{cases}$$

Следствие: Пусть $x_{\pm}(t)$ — факторизованные траектории чешуи. Тогда

$$Y_h(u) := \frac{x_+(2N + 2uN^{2/3}) - (2N - u^2N^{1/3})}{N^{1/3}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} A_2(u)$$

в смысле конечномерных распределений,

где $A_2(u)$ — процесс Дирхле-2 с распределением

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^n A_2(u_k) \leq s_k \right) = \det(1 - X_s K_2 X_s)_{L^2(\mathbb{R} \times \{u_1, \dots, u_n\})}$$

Сб-ка $A_2(u)$

1) стационарность, т.к. зависит от $u-u'$

2) Огнорасчетное предель: $P(A_2(0) \leq s) = F_2(s)$ -
- Грейса-Угочева, $\beta=2$.

