Асимптотики ядра Гауссова унитарного ансамбля.

$\beta=2$ Плотность вероятности: $f(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_i w(\lambda_i)$

Корреляционные ф-ии: $R_n(x_1, \dots, x_n) = \det\left(K(x_i, x_j)\right)_{1 \le i,j \le n}$

Корреляционное ядро: $K_N(x,y) = \sum_{k=0}^{N-1} \psi_n(x)\psi_n(y)$,

где $\psi_n(x) = p_n(x)\sqrt{\frac{w(x)}{h_n}}$, $p_n(x)$ - унитарные многочлены, ортогональные с весом $w(x)$, и $h_n = \langle p_n, p_n \rangle$.

Ортогональные многочлены. $H_n(x)$ многочлены Эрмита.

Ортогональность:

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \delta_{nm} \sqrt{\pi}\, 2^n n!$$

Старший член: $H_m(x) = 2^m x^m + \dots$

Рекуррентные соотношение: $w(x) = e^{-x^2}$

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x), \qquad H_0 = 1 \quad H_{-1} = 0 \quad n \ge -1$$

Производящая ф-я: $G(x;t) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \times \left(H_{n+1} = 2x H_n - 2n H_{n-1} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+1)!}(n+1) H_{n+1} = 2x \sum \frac{H_n t^n}{n!} - 2 \sum \frac{H_{n-1}}{(n-1)!} t^n$$

$$G' = 2x G - 2t G, \qquad G(x,0) = 1 \implies G(x\,t) = e^{-t^2+2xt}$$

Интегральное представление:

$$H_n(x) = n! \oint_{\Gamma_0} \frac{e^{-t^2+2xt}}{t^n} \frac{dt}{2\pi i t}$$

Унитарные многочлены Эрмита:

$p_n(x) = \frac{H_n}{2^n}$, Норма: $h_n = \frac{\sqrt{2\pi}\ n!}{2^n}$

$$K_N(x,y) = \gamma_N \frac{\psi_{N-1}(x)\psi_N(y) - \psi_{N-1}(y)\psi_N(x)}{x-y} =$$

$$\sqrt{\frac{h_N}{h_{N-1}}} \frac{\sqrt{w(x)w(y)}}{\sqrt{h_N h_{N-1}}} \frac{p_{N-1}(x)p_N(y) - p_N(x)p_{N-1}(y)}{y-x} =$$

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}{2^N (N-1)!\sqrt{\pi}} \frac{H_{N-1}(x)H_N(y) - H_{N-1}(y)H_N(x)}{y-x} =$$

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}} N!}{2^N \sqrt{\pi}} \frac{1}{y-x} \oint\oint \frac{dz_1}{2\pi i z_1} \frac{dz_2}{2\pi i z_2} \frac{e^{-z_1^2+2z_1x-z_2^2+2z_2y}}{z_1^N z_2^N} (z_1 - z_2)$$

$$K_N(x,x) = \gamma_N\ \psi_N'(x)\psi_{N-1}(x) - \psi_N(x)\psi_N'(x) =$$

$$= \frac{e^{-x^2}}{2^N} \frac{N!}{\sqrt{\pi}} \oint\oint \frac{dz_1}{2\pi i z_1} \frac{dz_2}{2\pi i z_2} \frac{e^{-z_1^2+2z_1x-z_2^2+2z_2y}}{z_1^N z_2^N} (z_1 z_2 - z_2^2) 2$$

Метод перевала: $\oint e^{Nf(z)} g(z) \frac{dz}{2\pi i z}$

1) Найти критические точки $f'(z_c)=0$

2) Деформировать контур в контур наискорейшего спуска, он же контур стационарной фазы.

$\mathrm{Im}\, f(z) = \mathrm{Im}\, f(z_c)$. В критических точках действительная часть $\mathrm{Re}\, f(z)$ имеет экстремум, а вне критических точек меняется монотонно.

Замечание: через критические точки проходят два контура стационарной фазы: наискорейшего спуска и наискорейшего подъема, где $\mathrm{Re}\, f(z)$ достигает максимума и минимума соответственно. Они пересекаются под углом $90°$.

На контуре наискорейшего спуска $\mathrm{Re}\, f(z)$ имеет максимум в z_c и в окрестности z_c можно использовать приближение:

$$f(z) = f(z_c) + \frac{1}{2} f''(z_c)(z-z_c)^2,$$

причем если

$$f''(z_c) = e^{i\theta} |f''(z_c)|,$$

то условие стационарной фазы подразумевает

$$z = z_c + s e^{-i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \quad \text{где } s \in \mathbb{R}.$$

В результате для интеграла имеем:

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{2\pi i} e^{Nf(z)} g(z)\, dz \simeq \int_{\Gamma_{SD}} \frac{dz}{2\pi i} e^{N\left(f(z_c) - \frac{|f''(z_c)|}{2} |z-z_c|^2 + \dots\right)} (g(z_c) + \dots) =$$

$$\simeq e^{Nf(z_0)} \left(\int_{-L/\sqrt{N}}^{L/\sqrt{N}} \frac{ds\, e^{-i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}}{2\pi} e^{-N \frac{|f''(z_c)|}{2} s^2} g(z_c) \left(1 + O(e^{-aL}) + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\right) \simeq$$

$$\simeq \frac{e^{Nf(z_c)}}{\sqrt{-2\pi f''(z_c)}} g(z_c) \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)$$

Асимптотич анализ $H_n(x) = \frac{N!}{2\pi i}\oint \frac{dz}{2\pi i z}\frac{e^{-z^2+2xz}}{z^N}$

Пусть $x = \sqrt{N}\,\xi$. сделаем замену $z = \sqrt{N}\cdot t$

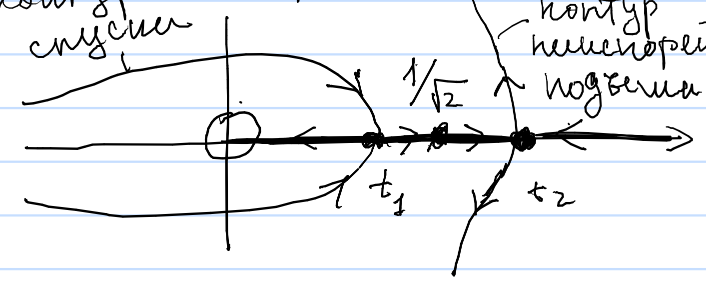
$$H_N = \frac{N!\,2^N}{2\pi i}\oint \frac{e^{Nf(t)}}{N^{N/2}}\,\frac{dt}{2\pi i t}$$, где $f(t) = -t^2 + 2\xi t - \ln t$

Седловые точки: $f'(t) = -2t + 2\xi - \frac{1}{t} = 0$

$2t^2 - 2\xi t + 1 = 0 \qquad t_{1,2} = \frac{2\xi \pm \sqrt{4\xi^2 - 8}}{4} = \frac{1}{2}\left(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 2}\right).$

1) $\xi > \sqrt{2}$

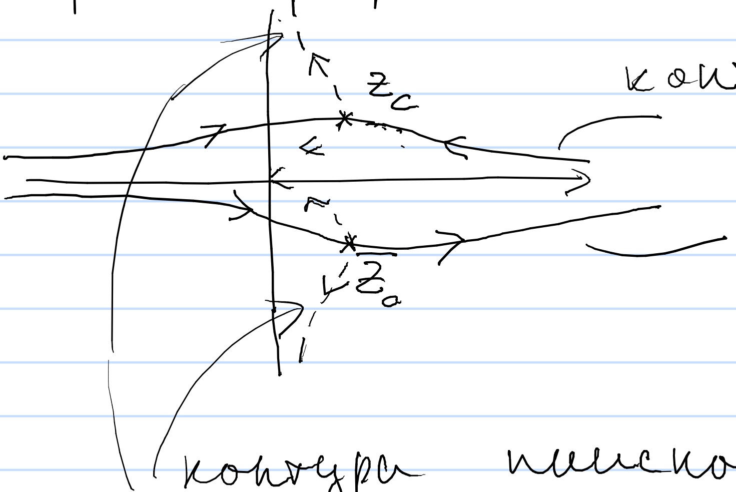
$\psi_N(\xi\sqrt{N}) \sim e^{-aN}$ при $\xi > \sqrt{2}$



стрелки показывают направление роста $\mathrm{Re} f(z)$

2) $\xi < \sqrt{2}$ $\qquad t = \frac{1}{2}\left(\xi \pm i\sqrt{2-\xi^2}\right) \qquad |t| = \frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 + 2 - \xi^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Две комплексно сопряженных крит точки $\qquad z_c = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}, \quad \bar{z}_c = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\theta}$



контура наискорейшего спуска

контура наискорейшего подъема.

$f(z_c) = \overline{f(\bar{z}_c)} \qquad f(z_c) + f(\bar{z}_c) = 2\,\mathrm{Re}\, f(z_c) = 1 + \xi^2 + \ln 2$

$|f''(z_c)| = -2 - \frac{1}{z_c^2} = 2\sqrt{2}\sqrt{2-\xi^2}$

1) Плотность:

$$K_N(\xi\sqrt{N}, \xi\sqrt{N}) = \frac{e^{-N\xi^2}\left(\frac{N}{e}\right)^N \sqrt{2\pi N}}{2^N\sqrt{\pi}} \oint\oint \frac{e^{N(f(z_1)+f(z_2))}}{N^{N-1}}\, 2\left(1-\frac{z_2}{z_1}\right)\frac{dz_1}{2\pi i}\frac{dz_2}{2\pi i}$$

$$= \frac{e^{-N\xi^2}\left(\frac{N}{e}\right)^N\sqrt{2\pi N}}{2^N\sqrt{\pi}\,N^{N-1}}\;\frac{e^{N(1+\xi^2+\ln 2)}}{2\pi\sqrt{8(2-\xi^2)}\,N}\cdot 2\overbrace{\left(2-\frac{z_c}{\bar z_c}-\frac{\bar z_c}{z_c}\right)}^{4-2\xi^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{N}}{\pi}\sqrt{2-\xi^2}\,.$$

2) $$K\left(\sqrt{N}\xi + \frac{\varphi\pi}{\sqrt{N}\sqrt{2-\xi^2}},\ \sqrt{N}\xi + \frac{\psi\pi}{\sqrt{N}\sqrt{2-\xi^2}}\right) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{2-\xi^2}}(\varphi+\psi)}}{(\psi-\varphi)\,2\sqrt{2-\xi^2}}\left(e^{\frac{2\pi}{\sqrt{2-\xi^2}}(\varphi z_c+\psi\bar z_c)}\left(\frac{1}{\bar z_c}-\frac{1}{z_c}\right)+\right.$$

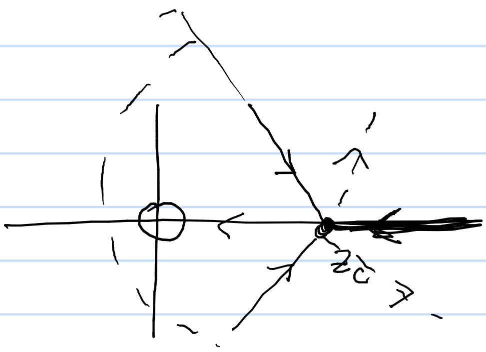
$$\left.+\,e^{\frac{\pi}{\sqrt{2-\xi^2}}(\varphi\bar z_c+\psi z_c)}\left(\frac{1}{z_c}-\frac{1}{\bar z_c}\right)\right) =$$

$$= \frac{2i\sqrt{2-\xi^2}\left(e^{\frac{2\pi}{\sqrt{2-\xi^2}}\frac{i\sqrt{2-\xi^2}}{2}(\varphi-\psi)} - e^{\frac{2\pi i\sqrt{2-\xi^2}}{\sqrt{2-\xi^2}\,2}(\psi-\varphi)}\right)}{\frac{\pi}{\sqrt{N}\sqrt{2-\xi^2}}(\psi-\varphi)\cdot 2\sqrt{2-\xi^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{N}\sqrt{2-\xi^2}}{\pi}\cdot\frac{\sin\pi(\varphi-\psi)}{\pi(\varphi-\psi)}\,.$$

3) Граница: $\xi = \sqrt{2}$ $\qquad f(z_c) = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$

$z_c = t_1 = t_2 = 1/\sqrt{2}$ $\qquad f''(z) = 0$ $\qquad f'''(z_c) = -\frac{2}{z_c^3} = -2^{5/2}$



В окрестности крит. точки:

$$Nf(z) = N\left(f(z_c) - \frac{2^{3/2}}{3}(z-z_c)^3+\dots\right)$$

$$N^{1/3}\sqrt{2}(z-z_c) = s\,e^{\frac{2\pi i}{3}k} \qquad s>0$$

Чтобы понять на каком масштабе флуктуируют позиции частиц вблизи границы сдвинем аргументы ядра на величину пропорциональную $N^{-\alpha}$, где показатель степени α определим так, чтобы $K\, N^{-\alpha}$ стремилось к нетривиальному пределу.

$$K\left(\sqrt{2N}+\varphi N^{-\alpha}, \sqrt{2N}+\psi N^{-\alpha}\right) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}\, N!}{2^N \sqrt{\pi}} \frac{1}{y-x} \oiint \frac{dz_1}{2\pi i z_1}\frac{dz_2}{2\pi i z_2} \frac{e^{-z_1^2+2z_1x-z_2^2+2z_2y}}{z_1^N z_2^N}(z_1-z_2) = \qquad (z_{1,2}=t_{1,2}\sqrt{N})$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2N}+\varphi N^{-\alpha})^2-\frac{1}{2}(\sqrt{2N}+\psi N^{-\alpha})^2}\left(\frac{N}{e}\right)^N\sqrt{2\pi N}}{2^N\sqrt{\pi}\,(\psi-\varphi)N^{-\alpha}} \times$$

$$\oint\oint \frac{dt_1}{2\pi i t_1}\frac{dt_2}{2\pi i t_2} \frac{e^{N(f(t_1)+f(t_2))}\Big|_{\xi=\sqrt{2}} + 2N^{-\alpha+\frac{1}{2}}(\varphi t_1+\psi t_2)}{N^{N-\frac{1}{2}}}(t_1-t_2) =$$

$$t_{1,2} = t_c + \frac{N^{-1/3}}{\sqrt{2}} s_{1,2} \qquad s_k \in R_+ \cdot e^{\frac{2\pi i k}{3}} \qquad k=1,2$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{2N}+\varphi N^{-\alpha})^2-\frac{1}{2}(\sqrt{2N}+\psi N^{-\alpha})^2}\left(\frac{N}{e}\right)^N\sqrt{2\pi N}\; e^{2Nf(t_c)}}{2^N\sqrt{\pi}\,(\psi-\varphi)N^{-\alpha}\, N^{N-1/2}}$$

$$\oint\oint \frac{ds_1\, ds_2\, N^{-2/3}}{(2\pi i)^2} e^{-\frac{s_1^3}{3}-\frac{s_2^3}{3}+2N^{-\alpha+\frac{1}{2}}\left(\varphi\left(t_c+\frac{N^{-1/3}}{\sqrt{2}}s_1\right)+\psi\left(t_c+\frac{N^{-1/3}}{\sqrt{2}}s_2\right)\right)}$$

$$\frac{N^{-1/3}}{\sqrt{2}}(s_1-s_2) = \left(\text{Хотим, чтобы } N^{-\alpha+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=O(1) \Rightarrow \alpha=\frac{1}{6}\right) =$$

$$= \frac{e^{-2N-\sqrt{2}N^{\frac{1}{2}-\alpha}(\varphi+\psi)-\frac{1}{2}(\varphi^2+\psi^2)N^{-2\alpha}}\sqrt{N}\,\cancel{e^{-N}}\sqrt{2N}\cdot \cancel{e^{3N}}\,\cancel{2^N}\, e^{(\varphi+\psi)\sqrt{2}N^{1/6}}}{\cancel{2^N}\, N^{-1/6}\,(\psi-\varphi)\, N}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{e^{\frac{4\pi i}{3}}\infty}^{e^{\frac{2\pi i}{3}}\infty}\!\!\int \frac{ds_1}{2\pi i}\frac{ds_2}{2\pi i} e^{-\frac{s_1^3}{3}+\sqrt{2}\varphi s_1-\frac{s_2^3}{3}+\sqrt{2}\psi s_2}(s_1-s_2) =$$

$$= \frac{N^{1/6}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\frac{Ai(\sqrt{2}\varphi)Ai(\sqrt{2}\psi)}{(\psi-\varphi)} = N^{1/6}\frac{Ai(\sqrt{2}\psi)Ai'(\sqrt{2}\varphi)-A(\sqrt{2}\varphi)Ai'(\sqrt{2}\psi)}{(\psi-\varphi)}$$

Теорема

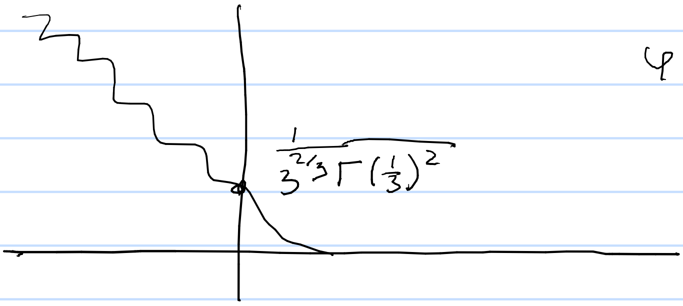
$$\lim_{N\to\infty} N^{-1/6} K_{GUE}\left(\sqrt{2N}+\frac{\varphi}{N^{1/6}\sqrt{2}};\ \sqrt{2N}+\frac{\psi}{N^{1/6}\sqrt{2}}\right) = K_{Airy}(\varphi,\psi) =$$

$$K_{Airy}(\varphi,\psi) := \frac{Ai(\varphi)Ai'(\psi) - Ai(\psi)Ai'(\varphi)}{\varphi-\psi}$$

При $\varphi\to\psi$ $\quad K_{Airy}(\varphi,\varphi) = (Ai'(\varphi))^2 - Ai(\varphi)Ai''(\varphi)$

Используя ур-е Эйри: $Ai(x)'' - xAi(x) = 0$

$$K_{Airy}(\varphi,\varphi) = (Ai'(\varphi))^2 - x(Ai(\varphi))^2$$



$\varphi\to\infty \quad K_{Airy}(\varphi,\varphi) \sim \frac{e^{-\frac{4y^{3/2}}{3}}}{8\pi y}$

Распределение максимального собств. значения:

$$P(\lambda_{max} < a) = P(\text{нет с. з. в } [a,\infty)) = E(0,[a,\infty))$$

$$= \det(1 - K_{GUE})_{L_2([a,\infty])}$$

Для $x,y>a>\sqrt{2N}$ $\quad K(x,y) \sim O(e^{-aN})$

$$P(\lambda_{max}<a) = \det(1-K) = 1 - \int_a^\infty K(x,x)\,dx + \frac{1}{2!}\int_a^\infty\int_a^\infty \det K(x_i,x_j)_{1\le i,j\le 2}\,dx_1\,dx_2 + \dots \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$$

Пусть $a = \sqrt{2N} - \frac{s}{N^{1/6}\sqrt{2}}$

$$P\left(\lambda_{max} < \sqrt{2N} - \frac{s}{N^{1/6}\sqrt{2}}\right) = F_2(s) := \det(1 - K_{Airy})_{L_2([s,\infty))}$$

Распред Трейси-Уидома: $\lambda_{max} = \sqrt{2N} + \chi_{TW}\frac{N^{-1/6}}{\sqrt{2}}$

Теорема (Трейси-Уидома):

$$F_2(s) = \exp\left(-\int_s^{\infty} (x-s)\, q^2(x)\, dx\right),$$ где

$q(x)$ - решение ур-я Пенлеве $\underline{\overline{II}}$: $q'' = sq + 2q^3$

(Хастингса - Маклеода) $\qquad q(s) \sim Ai(s)$

$$\frac{\partial}{\partial s} F_2(s) \to \begin{cases} e^{-\frac{1}{12}|x|^3} & x \to -\infty \\ e^{-\frac{4}{3}x^{3/2}} & x \to +\infty \end{cases}$$

$\mathbb{E}(\chi_{TW}) = -1.77\ldots$