Вычисление средних по ортогональным и симплектическим ансамблям.

1) Пфаффиан: Пусть $A=-A^T$ — кососимметрическая матрица $n\times n$

<u>Определение</u>:

$$Pf(A)=\frac{1}{2^m m!}\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma A_{\sigma_1\sigma_2}A_{\sigma_3\sigma_4}\cdots A_{\sigma_{2m-1}\sigma_{2m}}, \qquad (1)$$

где $m=[\frac{n}{2}]$, $[\ ]$ — целая часть.

Св-ва пфаффиана:

0) Для некососимметричной матрицы $Pf A = Pf\left(\frac{1}{2}(A-A^T)\right)$

1) Пусть $n=2m$, тогда $\boxed{Pf(PAP^T)=\det P\cdot Pf A}$.

В частности любую кососимметричную несингулярную матрицу можно получить сопрягая матрицу

$$Z_n=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}=e_2\otimes I_m,$$ проверить $Pf\, Z=1$, $\det Z=1$.

Таким образом для $\forall A:\ A=-A^T$, $\det A\neq 0$, $\exists P:\ \det P\neq 0$

$$A=PZP^T$$

Сл-во: $(Pf A)^2=\det A$

Док-во: $\det A=(\det P)^2\det Z=(\det P)^2$

$$\Rightarrow \det A=(Pf A)^2$$

$Pf A = Pf Z \det P=\det P$ $\square$

Для нечётных n эти формулы не выполняются. Однако данное определение оказывается удобно.

Для $A_{n\times n}$, с $n=2m+1$ определим матрицу

$$A^+_{n+1\times n+1}=\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix} \\ \hline -1\ \cdots\ -1 & 0\end{array}\right).$$ Тогда $Pf A^+ = Pf A$ (проверить).

Для работы в новых ансамблях нам понадобят-ся пфаффианные аналоги формул Андреева.

Формулы Де Бройна (de Bruijn).

1) $$\int\limits_{a\le x_1\le\dots\le x_n\le b} \det \phi_i(x_j)\, d^n x = \operatorname{Pf} A, \qquad (*)$$

где для четных $n=2m$, A-матрица $n\times n$ с элементами

$$a_{ij} = \int_a^b\int_a^b \phi_i(x)\,\phi_j(y)\,\operatorname{sgn}(x-y)\,dx\,dy \qquad i,j=1,\dots,2m$$

A - матрица размера $(n+1)\times(n+1)$, $n=2m+1$, где добавлены строчка и столбец:

$$a_{i,2m+2} = -a_{2m+2,i} = \int_a^b \phi_i(x)\,dx \qquad i=1,\dots,2m+1 \quad \text{и} \quad a_{2m+2,2m+2} = 0.$$

2) $$\iint D(\underline{\psi},\underline{\varphi};x)\,dx = 2^m\, m!\, \operatorname{Pf}(A), \quad \text{где} \qquad (**)$$

$$D = \det\begin{pmatrix} \psi_1(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \psi_1(x_m) & \varphi(x_m) \\ \vdots \\ \psi_n(x_1) & \varphi_n(x_1) & \dots & \psi_n(x_m) & \varphi_n(x_m) \end{pmatrix} \quad \text{если} \quad n=2m$$

и

$$D = \det\begin{pmatrix} \psi_1(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \psi_1(x_m) & \varphi(x_m) & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_n(x_1) & \varphi_n(x_1) & \dots & \psi_n(x_m) & \varphi_n(x_m) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{если} \quad n=2m+1$$

и $$A = \frac{1}{2}(K - K^T), \quad \text{где} \quad K_{ij} = \int_a^b \phi_i(t)\,\psi_j(t)\,dt$$

Док-во:

Для док-ва введем функцию:

$$E_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i<j} \operatorname{sgn}(x_j - x_i)$$

Утверждение 1.

$$E(x_1, \ldots, x_n) = \underset{1 \le i,j \le n}{\operatorname{Pf}} E_2(x_i, x_j) \quad \text{(теорема Шура)}$$

т. е. $E_2(x_1, x_2) = \operatorname{sgn}(x_2 - x_1)$, $E_3(x_1, x_2, x_3) = E(x_1, x_2) + E(x_2, x_3) + E(x_3, x_1)$

$$E_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = E(x_1, x_2)E(x_3, x_4) + E(x_3, x_1)E(x_2, x_4) + E(x_1, x_4)E(x_2, x_3)$$

Достаточно доказать для $x_i = i$, т. к. $E(x_1 \ldots x_n)$ зависит только от порядка x_n.
Для этого заметим, что $E(1, \ldots, n) = 1$ и $E(x_1, \ldots, x_n)$ – кососимметрична по $x_1, \ldots, x_n$.

Т. е. нужно доказать для $A_{ij} = \operatorname{sgn}(j - i)$

$$\operatorname{Pf} A = 1$$

[Доказать, используя $A = Q \Sigma Q^T$, где

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}?, \text{ и } \det Q = 1 \quad]$$

Пользуясь Утверждением 1.

1) $$\int\limits_{a\le x_1\le\dots\le x_n\le b} \det \varphi_i(x_j)\, d^n x = \frac{1}{n!}\int\limits_{[a,b]^n} E(x_1,\dots,x_n)\det\varphi_i(x_j)\, d^n x =$$

$$= \int\limits_{[a,b]^n} E_n(x_1,\dots,x_n)\,\varphi_1(x_1)\cdots\varphi_n(x_n)\, d^n x = \int\limits_{[a,b]^n} \operatorname{Pf} E_2(x_i,x_j)\prod_k \varphi_k(x_k)\, d^n x$$

$$= \frac{1}{2^m m!}\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma\prod_{k=1}^m \int_a^b\!\!\int_a^b E_2(x,y)\,\varphi_{\sigma_{2k-1}}(x)\,\varphi_{\sigma_{2k}}(y)\,dx\,dy = \operatorname{Pf} A,$$

где $$A_{ij} = \int_a^b\!\!\int_a^b \operatorname{sgn}(y-x)\,\varphi_i(x)\,\varphi_j(x)\,dx\,dy \quad \Rightarrow (*)$$

2) $$\int\limits_{[a,b]^n}\sum_\sigma(-1)^\sigma\prod_k \varphi_{\sigma_{2k-1}}(x_k)\,\psi_{\sigma_{2k}}(x_k)\, d^m x = 2^m m!\, \operatorname{Pf}\left(\int\varphi_i(x)\psi_j(y)\,dx\right) =$$

$$= 2^m m!\, \operatorname{Pf}\left(\frac{1}{2}\int\left(\varphi_i(x)\psi_j(x)-\varphi_j(x)\psi_i(x)\right)dx\right) = m!\operatorname{Pf} A$$

$$A_{ij} = \int\left(\varphi_i(x)\psi_j(x)-\varphi_j(x)\psi_i(x)\right)dx \quad \Rightarrow (**)$$

Круговые ансамбли.

1) $\beta = 1$

$$f(\theta_1, \ldots, \theta_N) = \prod_{i<j} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|$$

$$\mathbb{E}\left[\prod_i (1 + f(x_i))\right] = \frac{1}{N! Z_N} \int_{[0,2\pi]^N} \prod_i (1 + f(\theta_i)) \prod_{i<j} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}| \, d^N\theta =$$

$$(e^{i\theta_j} - e^{i\theta_i}) = e^{i\frac{\theta_i+\theta_j}{2}} \left(e^{i\frac{(\theta_j-\theta_i)}{2}} - e^{-i\frac{(\theta_j-\theta_i)}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta_i+\theta_j}{2}} \, i \left|e^{i\frac{\theta_j-\theta_i}{2}} - e^{-i\frac{\theta_j-\theta_i}{2}}\right|$$

$\theta_j > \theta_i$

$$= e^{\frac{i(\theta_i+\theta_j)}{2}} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_j}| \Rightarrow \underbrace{|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_i}| = (-i) e^{-i\frac{\theta_i+\theta_j}{2}} (e^{i\theta_j} - e^{i\theta_i})}_{\text{при } \theta_j > \theta_i}$$

$$= \frac{1}{Z_N} \int_{\theta_N \geq \ldots \geq \theta_1} d^N\theta \prod_i (1 + f(\theta_i)) \, e^{-\frac{i(N-1)}{2}\sum_i \theta_i} \, i^{\frac{N(N-1)}{2}} \prod_{i<j} (e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j})$$

$$= \frac{i^{\frac{N(N-1)}{2}}}{Z_N} \int_{\theta_N \geq \ldots \geq \theta_1} d^N\theta \prod_i (1 + f(\theta_i)) \det(e^{ip\theta_j})_{\substack{p = -\frac{N-1}{2}, \ldots, \frac{N-1}{2} \\ j = 1, \ldots, N}} =$$

$$= \frac{i^{\frac{N(N-1)}{2}}}{Z_N} \int_{\theta_N \geq \ldots \geq \theta_1} \det\left(e^{ip\theta_j}(1 + f(\theta_j))\right) d^N\theta =$$

$$= \frac{i^{\frac{N(N-1)}{2}}}{Z_N} \operatorname{Pf} \int e^{i(px - qy)} (1 + f(x))(1 + f(y)) \operatorname{sgn}(y - x) \, dx\, dy$$

Вместо пфаффиана вычислим детерминант

$$e_p(x) = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}} \qquad \varepsilon(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} x$$

$$\varepsilon\, e_p(x) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ipy}}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sgn}(x - y) \, dy = \frac{1}{2ip}\Big(-(\underset{\substack{\parallel \\ -1}}{e^{2\pi i p}} - e^{ipx}) + (e^{ipx} - 1)\Big)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{e_p}{ip}$$

$$A_{pq} \sim \int e^{i(-px+qy)} \, \mathrm{sgn}(x-y)\,(1+f(x))\,(1+f(y))\,dx\,dy$$

$$= \langle e_{-p}, \varepsilon e_q \rangle - \langle \varepsilon e_{-p}, e_q f \rangle + \langle f e_{-p}, \varepsilon e_q \rangle +$$

$$+ \langle f e_{-p}, \varepsilon f e_q \rangle = \frac{\delta_{p,q}}{iq} + \frac{1}{ip} \langle e_{-p}, e_q f \rangle + \frac{1}{iq} \langle f e_{-p}, e_q \rangle$$

$$+ \langle f e_{-p}, \varepsilon f e_q \rangle \sim$$

$$\sim \delta_{p,q} + \underbrace{\frac{q}{p} \langle e_{-p}, e_q f \rangle + \langle f e_{-p}, e_q \rangle - \langle \varepsilon f e_{-p}, f e_q \rangle iq}$$

$$= \det_{p,q} \left(I + \left(\overset{A}{\left(\frac{f e_{-p}}{ip} - f \varepsilon (f e_{-p}) , \; f e_{-p} \right)} \right) \overset{B}{\begin{pmatrix} iq\, e_q \\ e_q \end{pmatrix}} \right) =$$

$$= \det (I + BA) = \qquad A : \{ (\tfrac{1-N}{2}, \dots, \tfrac{N-1}{2}) \} \to \mathbb{C}^2 \otimes L^2([0, 2\pi])$$

$$B : \qquad \leftarrow$$

$$I + BA = \left[I + \begin{bmatrix} \sum_p \left(e_p \otimes \left(f e_{-p} - ip f \varepsilon (f e_{-p}) \right) \right) & \sum_p ip\, e_p \otimes f e_{-p} \\ \sum_p e_p \otimes \left(\frac{f e_{-p}}{ip} - f \varepsilon (f e_{-p}) \right) & \sum_p e_p \otimes f e_{-p} \end{bmatrix} \right]$$

$$(a \otimes b) A = a \otimes A^T b$$

$$\overset{\downarrow}{=} \begin{bmatrix} I + \sum e_p \otimes f e_{-p} & \sum ip\, e_p \otimes f e_{-p} \\ \sum \frac{1}{ip} e_p \otimes f e_{-p} - \varepsilon f & I + \sum e_p \otimes f e_{-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ \varepsilon f & I \end{bmatrix}$$

$$\det (1 + BA) = \det \left[I + \begin{bmatrix} \sum_p e_p \otimes e_{-p} & \sum_p ip\, e_p \otimes e_{-p} \\ \sum_p \frac{e_p \otimes e_{-p}}{ip} - \varepsilon & \sum_p e_p \otimes e_{-p} \end{bmatrix} f \right]$$

$$\mathbb{E}\left(\prod_i (1+f(\theta_i))\right) = \det(1+Kf)$$

$$K = \begin{pmatrix} S_{N/2}(x-y) & DS_{N/2}(x-y) \\ IS_{N/2}(x-y) - \varepsilon(x-y) & S_{N/2}(x-y) \end{pmatrix}$$

$$S_{\frac{N}{2}}(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_p e^{ipx} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\frac{N}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$DS_{N/2}(x) = S'_{N/2}(x) \qquad IS_{N/2} = \int_0^x S_N(y)\,dy$$

$\beta = 4$

1) Утверж. $\prod_{j<k}(x_j - x_k)^4 = \det\left(x_k^j \quad j x_k^{j-1}\right)_{\substack{j=0,\dots,2N-1 \\ k=1,\dots,N}}$

$$|e^{ix_k} - e^{ix_j}| = i e^{-\frac{x_k + x_j}{2}}(e^{ix_j} - x^{ix_k}) \quad \text{при } x_j \le x_k$$

$$\prod_{j<k} |e^{ix_k} - e^{ix_j}|^4 = e^{-2i(N-1)\sum x_j}\prod_{j<k}(e^{ix_j} - e^{ik_k})^4 =$$

$$= e^{-2i(N-1)\sum x_j}\det\left(e^{ijx_k} \quad j e^{i(j-1)x_k}\right)_{\substack{j=0,\dots,2N-1 \\ k=1,\dots,N}} = \det\left(e^{ipx_k} \quad pe^{ipx_k}\right)_{\substack{p=-\frac{N-1}{2},\dots,\frac{N-1}{2} \\ k=1,\dots,N}} =$$

$$\int_{[a,b]^N}\det\left(e^{ipx_k} \quad pe^{ipx_k}\right) d^N x \sim \mathrm{Pf}\left(\int (q-p)e^{i(q+p)x}(1+f(x))dx\right)_{p,q}$$

Вычислим детерминант:

$$\det_{p,q}\int\left((q-p)e^{i(q+p)x}(1+f(x))dx\right) \sim \det_{p,q}\left(\int (q+p)e^{i(q-p)x}(1+f(x))dx\right) \sim$$

$$\sim \det_{p,q}\left(\delta_{p,q} + \frac{1}{4\pi}\int\left(1+\frac{p}{q}\right) e^{i(q-p)x} f(x)\,dx\right) =$$

$$= \det(I + AB) = $$

, где $A_{q,x} = \left(e^{-ipx} \quad ip\,e^{-ipx}\right)\frac{f(x)}{4\pi}$ $B_{x,p} = \begin{pmatrix} e^{iqx} \\ \frac{1}{iq} e^{iqx}\end{pmatrix}$

$$= \det(I + BA)$$

$$BA = \sum_p B_{xp}A_{py} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi}\sum\limits_p e^{ip(x-y)} & \frac{1}{4\pi}\sum\limits_p ip\,e^{ip(x-y)} \\ \frac{1}{4\pi}\sum\limits_p \frac{e^{i(x-y)}}{ip} & \frac{1}{4\pi}\sum e^{ip(x-y)}\end{pmatrix}}_{K_N} f(y)$$

Обозначим $S_N = \frac{1}{2\pi}\sum\limits_p e^{ip(x-y)} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin Nx}{\sin\frac{x}{2}}$

$DS_N = \frac{d}{dx}S_N(x)$ $IS_N = \int\limits_0^x S_N(y)\,dy$

Тогда $\mathbb{E}\left[\prod(1+f(\theta_j))\right] = \det(\mathbb{1}+Kf)$, где

$$K(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} S_N(x-y) & DS_N(x-y)\\ IS_N(x-y) & S_N(x-y)\end{pmatrix}.$$

Эрмитовые матрицы:

1) $\beta=4$

$$\prod_{i<j}|x_i-x_j|^4=\det\left(x_k^j \quad j x_k^{j-1}\right)=\det\left(p_j(x_k) \quad p_j'(x_k)\right)$$

$j=0,\dots,2N-1$
$k=1,\dots,N$

$$\int\prod_i w(x_i)\,\det\left(p_i(x_k)\quad p_j'(x_k)\right)\prod_j\left(1+f(x_i)\right)=$$

$$=\operatorname{Pf}\int\left(p_i(x)\,p_j'(x)-p_j(x)\,p_i'(x)\right)w(x)\left(1+f(x_i)\right)$$

Вычислим det.

Пусть $M_{ij}=\int(p_i p_j'-p_j p_i')\,w\,dx$

$$\det_{i,j}\int\left(p_i(x)\,p_j'(x)-p_j(x)\,p_i'(x)\right)w(x)\left(1+f(x)\right)=$$

$$\det\left(M+\int(p_i p_j'-p_j p_i')\,w(x)\,f(x)\right)\sim$$

$$\sim\det\left(M+\int(\psi_i\psi_j'-\psi_j\psi_i')\cdot f\,dx\right)\sim \qquad (\psi=\sqrt{w}\cdot p)$$

$$\sim\det_{i,j}\left(\delta_{ij}+\int(\eta_i\psi_j'-\eta_j'\psi_i')\,f\,dx\right)= \qquad (\eta_i=M_{ij}^{-1}\psi_j)$$

$$=\det(1+AB)\ \textcircled{=}, \text{ где } A_{ix}=(\eta_i,-\eta_i')\cdot f;\ B_{xi}=\begin{pmatrix}\psi_i'\\ \psi_i\end{pmatrix}$$

$\textcircled{=}\det(1+BA)$, где BA интегральный оператор с ядром

$$K_N(x,y)=B_{xi}A_{iy}=\begin{pmatrix}\sum_i\psi_i'(x)\,\eta_i(y) & -\sum_i\psi_i'(x)\,\eta_i'(y)\\ \sum\psi_i(x)\,\eta_i(y) & -\sum_y\psi_i(x)\,\eta_i'(y)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}S_N(x,y) & S_N D(x,y)\\ IS_N(x,y) & S_N(y,x)\end{pmatrix};$$

Какие φ и η выбирать? Простейший выбор — кососортогональные многочлены с $M = \mathbb{Z}_N$.

2) $\beta = 1$

$$\int \prod_{j<k} |x_j - x_k| \prod_j w(x_j)\,(1+f(x_j))\, d^N x \sim$$

$$\sim \int_{x_1 < \ldots < x_k} \det_{j,k} (p_j(x_k)) \prod_j w(x_j)\,(1+f(x_j))\, d^N x \sim$$

$$\sim \operatorname*{Pf}_{j,k} \iint \varepsilon(x-y)\, p_j(x)\, p_k(y)\,(1+f(x))(1+f(y))\, w(x)\, w(y)\, dx\, dy$$

Считаем $\det = \mathrm{Pf}^2$, пусть $\varphi_i(x) = w(x)\, p_i(x)$

$$\mathrm{Det} \iint \varepsilon(x-y)\, \varphi_j(x)\, \varphi_k(y)\, \big(1 + f(x) + f(y) + f(x) f(y)\big)\, dx\, dy$$

$$= \mathrm{Det}\left(M_{jk} + \langle f\varphi_j, \varepsilon(\varphi_k)\rangle - \langle f\varphi_k, \varepsilon\varphi_j\rangle - \langle f\varphi_k, \varepsilon(f\varphi_j)\rangle\right)$$

$\eta_j = M^{-1}_{jk}\varphi_k$

$$\sim \mathrm{Det}\left(\delta_{ij} + \langle f\eta_j, \varepsilon(\varphi_k)\rangle - \langle f\varphi_k, \varepsilon\eta_j\rangle - \langle f\varphi_k, \varepsilon(f\eta_j)\rangle\right)$$

$$= \mathrm{Det}(1 + AB) = \mathrm{Det}(1 + BA) =$$

$$A_{j,x} = \begin{pmatrix} -f\varepsilon(\eta_j) - f\varepsilon(f\eta_j) & f\eta_j \end{pmatrix}$$

$$B_{x,j} = \begin{pmatrix} \varphi_j \\ \varepsilon(\varphi_j) \end{pmatrix}$$

$I+BA$ – интегральный оператор с ядром

$$K_N(x,y) = \sum_j B_{xj} A_{jy} =$$

$$\begin{pmatrix} I - \sum_j \varphi_j \otimes f\varepsilon\eta_j - \varphi_j \otimes f\varepsilon(f\eta_j) & \sum_j \varphi_j \otimes f\eta_j \\ -\sum_j \varepsilon\varphi_j \otimes f\varepsilon\eta_j - \sum_j \varepsilon\varphi_j \otimes f\varepsilon(f\eta_j) & I + \sum_j \varepsilon\varphi_j \otimes f\eta_j \end{pmatrix} =$$

$$a\otimes b\cdot A = a\otimes A^t b$$

$$= \begin{pmatrix} I - \sum \varphi_j \otimes f\varepsilon\eta_j & \sum \varphi_j \otimes f\eta_j \\ -\sum \varepsilon\varphi_j \otimes f\varepsilon\eta_j - \varepsilon f & I + \sum \varepsilon\varphi_j \otimes f\eta_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \varepsilon f & I \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$I + K_N \cdot f, \quad \text{где} \quad K_N(x,y) = \begin{pmatrix} S_N(x,y) & S_N D(x,y) \\ IS_N(x,y) - \varepsilon(x-y) & S_N(y,x) \end{pmatrix}$$

$$S_N(x,y) = -\sum_{j,k=0}^{N-1} \varphi_j(x) (M^{-1})_{jk}\, \varepsilon\varphi_k(y)$$

$$IS_N(x,y) = -\sum_{j,k=0}^{N-1} \varepsilon\varphi_j(x) (M^{-1})_{jk}\, \varepsilon\varphi_k(y)$$

$$S_N D(x,y) = \sum_{j,k} \varphi_j (M^{-1})_{jk}\, \varphi_k(y)$$

$\square$