

Программа курса «Функциональный анализ»
Часть 1: осень 2015, лектор: профессор В. И. Богачев

1. Основные структуры и задачи функционального анализа: пространства, отображения, уравнения.
2. Метрические пространства. Полнота. Теорема Бэра. Банаховы и гильбертовы пространства.
3. Примеры: пространства непрерывных функций, интегрируемых функций и пространства последовательностей. Изометричность метрического пространства части банахова пространства ограниченных функций на нем.
4. Компакты. Равносильность различных определений компакта в метрическом пространстве. Критерии компактности в $B(\Omega)$, $C[a, b]$ (теорема Асколи – Арцела) и l^2 .
5. Эквивалентность норм на конечномерном пространстве. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
7. Теоремы о неподвижных точках: теорема о сжимающих отображениях и теорема Шаудера.
8. Ортонормированные системы и базисы в гильбертовых пространствах. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
9. Существование ортогональной проекции и ортогонального разложения в гильбертовом пространстве.
10. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве. Примеры базисов. Теорема Рисса – Фишера об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
11. Линейные операторы и линейные функционалы. Норма оператора и непрерывность оператора. Теорема Банаха – Штейнгауза.
12. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве. Явный вид сопряженных к конкретным пространствам.
13. Теорема Хана – Банаха и ее следствия.
14. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.
15. Компактные операторы и их свойства. Примеры компактных и некомпактных операторов.
16. Слабая и $*$ -слабая сходимость. Слабая сходимость и слабая компактность в гильбертовом пространстве.
17. Спектр оператора. Спектр компактного оператора. Альтернатива Фредгольма. Теорема Гильберта – Шмидта. Применение к интегральным уравнениям.
18. Обобщенные функции классов D' и S' . Производная обобщенной функции. Уравнения с обобщенными функциями.
19. Преобразование Фурье в L^2 и S' . Собственные функции преобразования Фурье.
20. Классы Соболева.