ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИВАСАВЫ (весна 2017)

Пусть p – нечётное простое число. В процессе работы над теоремой Ферма Куммер открыл связь между арифметикой полей, порождённых над $\mathbb{Q}$ корнями p-ой степени из единицы, и значениями дзета-функции Римана в нечётных отрицательных целых точках. Кроме того, Куммер установил сравнения между этими значениями, которые позволяют определить p-адический аналог дзета-функции Римана интерполяцией. Почти столетие спустя Ивасава сделал столь же важное открытие, что p-адический аналог дзета-функции Римана связан с арифметикой полей, порождённых над $\mathbb{Q}$ корнями из единицы всех p-примарных степеней.

Теория Ивасавы происходит из следующей его идеи: в некоторых бесконечных башнях полей часто бывает проще описать все модули Галуа одновременно, а не один из них.

Ивасава изучал пример p-силовских подгрупп I_n группы классов идеалов поля K_n в башне полей $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots \subset$ такой, что $\mathrm{Gal}(K_n/K_1) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ для некоторого простого p. (В случае полей $K_n = \mathbb{Q}(\mu_{p^n})$, порождённых над $\mathbb{Q}$ корнями из единицы степени p^n, группа I_1 уже Куммеру была известна как основное препятствие к прямому доказательству теоремы Ферма.) Естественным образом, I_n являются $\mathbb{Z}_p$-модулями, а также и модулями над $G_n = \mathrm{Gal}(K_n/K_1)$. Однако работать с групповым кольцом $\mathbb{Z}_p[G_n]$ неудобно потому, например, что оно не целостно.

При $m > n$ имеются норменные отображения $\mathbb{Z}_p[G_m]$-модулей $I_m \to I_n$, так что обратный предел $\varprojlim I_n$ является модулем над обратным пределом $\Lambda := \varprojlim \mathbb{Z}_p[G_n]$. Понять устройство кольца Λ гораздо проще: это полное 2-мерное регулярное локальное кольцо, (неканонически) изоморфное кольцу степенных рядов $\mathbb{Z}_p[[T]]$. Имеется структурная теорема для модулей над Λ. Простейший пример следствия из этой теоремы: p делит число классов одного из полей K_n тогда и только тогда, когда оно делит числа классов всех полей K_n.

Имеется глубокая связь этой теории со специальными значениями L-функций. Идея Ивасавы, названная основной гипотезой Ивасавы, утверждает, что "характеристический идеал" в кольце Λ модуля I_n имеет образующую, которая является, в некотором смысле, p-адической L-функцией. Это доказано, например, для всех вполне вещественных числовых полей K_0.

Нашими целями будут разбор доказательств некоторых случаев основной гипотезы Ивасавы и, в частности, следующая формула:

$$\zeta(1-2k) = (-1)^k \prod_p \frac{|H^1_{\text{ét}}(\mathbb{Z}[1/p], \mu_{p^N}^{\otimes 2k})|}{|H^0_{\text{ét}}(\mathbb{Z}[1/p], \mu_{p^N}^{\otimes 2k})|} \quad \text{для целых } k \geqslant 1 \text{ при } N \gg 0.$$

Часть занятий предполагается отвести на разбор задач.

Список литературы

[1] J.Coates, R.Sujatha, **Cyclotomic Fields and Zeta Values.** Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2006.

[2] Serge Lang, **Cyclotomic fields I and II.** Graduate Texts in Mathematics 121, With an appendix by Karl Rubin (Combined 2nd ed.), Berlin, New York: Springer-Verlag, 1990.

[3] Lawrence C. Washington, **Introduction to cyclotomic fields.** Graduate Texts in Math. 83 (2nd ed.), Berlin, New York: Springer-Verlag, 1997.

[4] Andrew Wiles, *The Iwasawa conjecture for totally real fields*, Ann. Math. **131** (1990), no.3, 493–540.