Наглядная геометрия и топология

Михаил Скопенков

http://skopenkov.ru/courses/geometry-16f.html

Этот курс адресован тем, кто хочет *уже в процессе изучения* геометрии и топологии получить представление о том, где и как применять полученные знания.

Для каждой изучаемой теории, каждого нового понятия мы постараемся показать, как они *естественно возникают* при решении практических задач, к каким задачам применяются дальше. Благодаря этому большинство объектов становятся наглядными.

Материал будет изучаться в виде решения задач участниками, с подробными указаниями и последующим разбором на занятии. Первые занятия доступны школьникам.

Примерная программа.

1. *Проективная геометрия* изучает свойства *проекции.* Возникла из учения художников о *перспективе.* Это базовый инструмент изучения множеств, заданных алгебраическими уравнениями. А значит, применяется почти во всех разделах математики.

1a. *Аффинная геометрия.* Параллельная проекция на плоскости и в пространстве. Решение геометрических задач с помощью параллельной проекции. Простое отношение — то, что сохраняется при параллельной проекции прямой. Линейные преобразования прямой и плоскости — композиции параллельных проекций.

1b. *Проективная геометрия.* Центральная проекция на плоскости и в пространстве. Решение геометрических задач с помощью центральной проекции. Теоремы Паппа, Паскаля, Брианшона и Дезарга. Двойное отношение — то, что сохраняется при центральной проекции прямой. Гармонические четверки. Дробно-линейные преобразования вещественной прямой — композиции центральных проекций. Проективная прямая, проективная плоскость, проективные преобразования — способ сделать проекцию взаимно-однозначной. Основная теорема проективной геометрии (Мебиуса–фон Штаудта)*.

2. *Неевклидова геометрия* — геометрия с необычными свойствами параллельных линий. Возникла из попыток доказать *постулат Евклида о параллельных* и при изучении гладких поверхностей. Это основа для теории относительности.

2a. *Сферическая геометрия.* Сферические прямые, углы и треугольники. Сумма углов треугольника. Скалярное и векторное произведения для решения задач на сфере.

2b. *Геометрия Лобачевского.* Сравнение аксиом геометрий Евклида и Лобачевского. Элементарные теоремы геометрии Лобачевского. Сумма углов треугольника. Идеальные треугольники. Окружности, орициклы и эквидистанты. Длина окружности. Модель Кэли-Клейна. Поверхность Бельтрами.

2c*. *Другие геометрии.* Геометрия и кинематика Галилея. Парабола как окружность в геометрии Галилея. Геометрия Минковского и кинематика теории относительсти. Пространство скоростей в теории относительсти и геометрия Лобачевского.

3. *Топология* изучает свойства *непрерывности.* Возникла, в частности, в процессе решении задачи о раскрасках карт на плоскости. Применяется во всех разделах математики и в других естественных науках.

3a. *Графы на поверхностях.* Раскраска карт на поверхностях. Формула Эйлера и неравенство Эйлера. Обзор наглядных применений: микросхемы, дорожные развязки, итд.

E-mail address: `skopenkov@rambler.ru`

1. Аффинная геометрия прямой и плоскости

Пусть l_1 и l_2 — две прямые на плоскости, l — прямая, не параллельная ни одной из них. *Параллельным проектированием* прямой l_1 на прямую l_2 относительно направления l называют отображение, которое точке A прямой l_1 ставит в соответствие точку пересечения прямой l_A, параллельной l и проходящей через A, с прямой l_2.

1.1. Любое ли параллельное проектирование прямой на прямую сохраняет длины отрезков?

Простым отношением упорядоченной тройки точек A, B, C на прямой ($B \neq C$) называется такое число x, что $\overrightarrow{AC} = x \cdot \overrightarrow{BC}$.

1.2. a) Простое отношение упорядоченной тройки точек на прямой равно x. Найдите простые отношения этих точек, записанных во всех других порядках.
b) Простое отношение упорядоченной тройки точек на прямой сохраняется при параллельном проектировании.

1.3. a) Композицией нескольких параллельных проектирований прямой можно перевести любые две различные точки в любые другие две различные точки.
b) Верно ли аналогичное утверждение для двух троек точек на прямой?
c) Дайте определение параллельного проектирования одной плоскости в пространстве на другую.
d) Композицией нескольких параллельных проектирований плоскости можно перевести любой треугольник в любой другой.
e) Верно ли аналогичное утверждение для двух четырехугольников?

1.4. a) Каждая сторона треугольника поделена на три равные части, и точки деления соединены с противоположными вершинами. Докажите, что диагонали “внутреннего” 6-угольника пересекаются в одной точке.
b) В каком отношении делит основания трапеции прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и точку пересечения продолжений боковых сторон?
c) Даны две параллельные прямые и точки A, B на одной из них. Постройте одной линейкой середину отрезка AB.

1.5. Пусть непрерывная биекция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ середину любого отрезка переводит в середину его образа, а точки 0 и 1 оставляет на месте. Тогда для всех $x, y \in \mathbb{R}$ и $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$,
a) $f(2x) = 2f(x)$; b) $f(x+y) = f(x) + f(y)$; c) $f(m/n) = m/n$; d) $f(x) = x$.

Задача Дня. *Основная теорема аффинной геометрии (Мёбиус–фон Штаудт).* Любое непрерывное взаимно-однозначное отображение плоскости, переводящее прямые в прямые, является композицией параллельных проектирований.
