

В курсе планируется доказать следующий классический результат, а также некоторые его современные обобщения:

Теорема Пойа. Если человек случайным образом блуждает по 2-мерной квадратной сетке, то он когда-нибудь вернется в начальную точку с вероятностью 1. Если же он блуждает по 3-мерной кубической сетке, то вероятность возвращения строго меньше 1. Все необходимые определения будут даны.

Доказательство основано на замечательной физической интерпретации, использующей электрические цепи. В процессе доказательства мы познакомимся с основами теории вероятности и теории потенциала. Изложение следует статьям 1 и 2.

Материал будет изучаться в виде решения задач участниками, с подробными указаниями и последующим разбором на занятии. Решения большинства задач первых занятий доступно школьникам, а на последних занятиях будут предложены красивые задачи для исследования.

Для решения задач необходимо знание простейших понятий теории графов. Полезно также знакомство с вероятностью и системами линейных уравнений. Никаких специальных знаний физики не требуется.

Примерная программа.

1. Определение случайного блуждания. Определение электрической цепи. Физическая интерпретация вероятности достижения. Возвратность случайного блуждания по 1-мерной решетке.

2. Существование и единственность потенциала в электрической цепи. Принцип максимума. Проводимость и ее вероятностный смысл. Сохранение энергии. Вариационный принцип. Принцип разрезания и склейки. Проводимость между центром и границей квадратной решетки $n \times n$. Возвратность случайного блуждания по 2-мерной решетке.

3. Проводимости деревьев. Невозвратность случайного блуждания по 3-мерной решетке.

4. Проводимости симметричных электрических цепей. Бесконечные электрические цепи. Проводимость между соседними узлами квадратной решетки.

Литература

1. P. G. Doyle and J. L. Snell, Random walks and electric networks, Mathematical Association of America, 1984, <http://arxiv.org/abs/math.PR/0001057>.

2. М. Скопенков, В. Смыкалов, А. Устинов, Случайные блуждания и электрические цепи, Математическое Просвещение, 3-я серия **16** (2012), 25–47, <http://www.mccme.ru/free-books/matprosh.html>.

3. А. Пахарев, М. Скопенков, А. Устинов, Сквозь сеть сопротивлений, Математическое Просвещение, 3-я серия **18** (2014), 33–65.