

Струны. Задачи. 1

1. Найдите действие $S(x_0, x_1; t)$ для гармонического осциллятора с лагранжианом $L = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 - kx^2)$ при движении по классической траектории от x_0 до x_1 за время t .
2. Рассмотрим действие точечной релятивистской частицы в произвольной пространственно-временной метрике $G_{\mu\nu}(X)$:

$$S[X; e] = \frac{1}{2} \int d\tau e \left(e^{-2} G_{\mu\nu}(X) \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau} - m^2 c^2 \right)$$

Выведите уравнения движения для этого действия. Каков их геометрический смысл?

3. Вычислите интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx_1 dx_2 \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}, A\vec{x})\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 A_{ij} x_i x_j\right)$$

для матриц а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Рассмотрим действие

$$S = \frac{1}{2} \int (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2) d^2 x$$

для вещественного скалярного поля φ в двумерном пространстве Минковского с сигнатурой $(+1, -1)$ и координатами $x_0 = t$, $x_1 = x$.

- а) Написать уравнение движения поля φ и найти его общее решение в виде интеграла Фурье.
- б) Выписать компоненты тензора энергии-импульса поля φ . При каком условии след тензора энергии-импульса обращается в нуль?
- в) Выразить энергию и импульс поля φ через коэффициенты Фурье, входящие в общее решение уравнения движения.