# Листок 1

Задача 1. Найдите периодическое решение уравнения $\dot{x} = x + \sin t$ и исследуйте его на устойчивость.

Задача 2. Докажите, что если линейное дифференциальное уравнение первого порядка с 1-периодическими коэффициентами имеет непостоянное $\tau$-периодическое решение, то 1 является периодом этого решения и число $\tau$ рационально.

Задача 3. Предположим, что $b, h \in C(\mathbb{R})$ и $b(x) < h(x)$. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ на интервале $(-\alpha, \alpha)$ удовлетворяют уравнениям $\dot{x} = b(x)$ и $\dot{y} = h(y)$, причем $x(0) = y(0)$. Докажите, что $x(t) \leq y(t)$ для всех $t \geq 0$.

Задача 4. Нарисуйте все возможные фазовые портреты для линейной системы $2 \times 2$ с постоянной матрицей, у которой хотя бы одно собственное значение равно нулю.

Задача 5.1. Нарисуйте фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^3 \end{cases}$$

и сравните его с фазовым портретом системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$$

Задача 5.2. Можно ли при изучении в малой окрестности точки $(0, 0)$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + y^3 \end{cases}$$

заменить ее на систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x? \end{cases}$$

Если нет, то объясните чем именно фазовые кривые этих двух систем существенно отличаются.

Задача 6. Пусть $\Phi(x)$ – гладкая функция, причем $\Phi'' \geq 0$. Пусть задано число $x_0$. Набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_N$ построен по следующему правилу: $x_{k+1}$ – точка экстремума функции

$$f(x) = \frac{(x - x_k)^2}{2N^{-1}} + \Phi(x).$$

Докажите, что ломаные $L_N$ с вершинами в точках $(0, x_0), (N^{-1}, x_1), (2N^{-1}, x_2) \ldots, (1, x_N)$ равномерно на отрезке $[0, 1]$ приближаются к решению $x(t)$ задачи Коши $\dot{x} = -\Phi'(x)$, $x(0) = x_0$.

Задача 7. Приведите пример области и дифференциальной 1-формы на этой области, которая является замкнутой, но не является точной.