

Соглашение. Все векторные пространства рассматриваются над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.1. Пусть X — нормированное пространство. Докажите, что операции сложения $X \times X \rightarrow X$ и умножения на число $\mathbb{K} \times X \rightarrow X$ непрерывны.

1.2. Пусть X — нормированное пространство и $X_0 \subseteq X$ — векторное подпространство. Докажите, что его замыкание $\overline{X_0}$ — тоже векторное подпространство в X .

1.3. Пусть $p, q \in (1, +\infty)$, и пусть $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(а) Докажите *неравенство Юнга*:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b \geq 0).$$

(б) Из неравенства Юнга выведите *неравенство Гёльдера*:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad (x, y \in \mathbb{K}^n).$$

(с) Из неравенства Гёльдера выведите *неравенство Минковского*:

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \quad (x, y \in \mathbb{K}^n).$$

1.4. Нарисуйте единичный шар на плоскости \mathbb{R}^2 , снабженной нормой $\|\cdot\|_p$, для различных $p \in [1, +\infty]$. Обратите внимание на случаи $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$. Что происходит с единичным шаром с ростом p ?

1.5. Пусть $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ — две нормы на векторном пространстве X , и пусть B и B' — соответствующие замкнутые единичные шары. Докажите, что $B \subseteq B' \iff \|\cdot\|' \leq \|\cdot\|$.

1.6. Пусть $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

(а) Докажите, что $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$ на \mathbb{K}^n .

(б) Докажите, что существует такая константа $C = C_{n,p,q} > 0$, что $\|\cdot\|_p \leq C \|\cdot\|_q$ на пространстве \mathbb{K}^n .

(с) Можно ли эту константу выбрать не зависящей от n ?

(д) Найдите наименьшую константу $C_{n,p,q}$ с указанным свойством. Интерпретируйте ответ как норму некоторого оператора.

1.7. Пусть c_{00} — пространство всех *финитных* последовательностей (т.е. числовых последовательностей $x = (x_n)$, для каждой из которых существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_n = 0$ для всех $n > N$). Эквивалентны ли нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ на c_{00} при $p \neq q$?

1.8. Докажите, что последовательность $(x^{(k)})$ в пространстве \mathbb{K}^n сходится к вектору $x \in \mathbb{K}^n$ по норме $\|\cdot\|_p$ (где $1 \leq p \leq +\infty$) тогда и только тогда, когда она сходится к x покоординатно.

1.9. (а) Докажите, что c_0 замкнуто в ℓ^∞ . (б) Чему равно замыкание ℓ^p в ℓ^∞ ?

1.10. Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$. (а) Докажите, что $\ell^p \subset \ell^q$, но $\ell^p \neq \ell^q$ при $p \neq q$. (б) Чему равна норма оператора вложения ℓ^p в ℓ^q ?

1.11. Пусть X — полунормированное пространство, и пусть $N = \{x \in X : \|x\| = 0\}$. Покажите, что формула

$$\|x + N\|^\wedge = \|x\| \quad (x \in X)$$

корректно определяет норму на X/N . (Корректность в данном случае означает, что правая часть этой формулы зависит лишь от класса $x + N \in X/N$, а не от самого элемента $x \in X$).

Если (X, μ) – пространство с мерой и $p \in [1, +\infty)$, то через $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ обозначается множество всех таких измеримых функций $f: X \rightarrow \mathbb{K}$, что функция $|f|^p$ μ -интегрируема. Следующая задача показывает, что $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ – полунормированное пространство. Ассоциированное с ним нормированное пространство $\mathcal{L}^p(X, \mu)/\{f: \|f\|_p = 0\} = \mathcal{L}^p(X, \mu)/\{f: f = 0 \text{ п.в.}\}$ (см. задачу 1.11) обозначается через $L^p(X, \mu)$.

1.12. Пусть (X, μ) – пространство с мерой, и пусть $p, q \in (1, +\infty)$ таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(а) Докажите, что если $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ и $g \in \mathcal{L}^q(X, \mu)$, то функция fg интегрируема и справедливо *неравенство Гёльдера*

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

(б) Из неравенства Гёльдера выведите, что $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ – векторное пространство, и что справедливо *неравенство Минковского*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)).$$

1.13. Пусть $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.

(а) Докажите, что существует такая константа $C = C_{a,b,p,q} > 0$, что $\|\cdot\|_p \leq C \|\cdot\|_q$ на пространстве $C[a, b]$.

(б) Найдите наименьшую константу $C_{a,b,p,q}$ с указанным свойством. Интерпретируйте ответ как норму некоторого оператора.

(с) Эквивалентны ли нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ на $C[a, b]$ при $p \neq q$?

Пусть (X, μ) – пространство с мерой, и пусть f – существенно ограниченная (т.е. ограниченная на множестве полной меры) функция на X . *Существенная верхняя грань* функции $|f|$ определяется формулой

$$\operatorname{ess\,sup} |f| = \inf \left\{ \sup_{x \in E} |f(x)| : E \subset X, \mu(X \setminus E) = 0 \right\}. \quad (1)$$

1.14. Докажите, что \inf в формуле (1) достигается. Как следствие, $\operatorname{ess\,sup} |f| = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$ п.в.

1.15. Пусть $f \in C[a, b]$. Докажите, что $\operatorname{ess\,sup} |f| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

Множество всех существенно ограниченных функций на пространстве с мерой (X, μ) обозначается через $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$. Следующая задача показывает, что $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ – полунормированное пространство. Ассоциированное с ним нормированное пространство $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)/\{f: \|f\|_\infty = 0\} = \mathcal{L}^\infty(X, \mu)/\{f: f = 0 \text{ п.в.}\}$ (см. задачу 1.11) обозначается через $L^\infty(X, \mu)$.

1.16. Докажите, что $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ – векторное пространство, и что формула

$$\|f\| = \operatorname{ess\,sup} |f|$$

задает полунорму на $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$.

1.17. Пусть $\mu(X) < \infty$. Докажите, что $L^q(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$ при $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Чему равна норма оператора вложения $L^q(X, \mu)$ в $L^p(X, \mu)$?

1.18. Докажите, что $L^p[a, b] \neq L^q[a, b]$ при $p \neq q$.

Замечание. Результат задачи 1.17 не переносится на случай $\mu(X) = \infty$. В самом деле, пусть $X = \mathbb{N}$, и пусть μ – «считающая» мера на σ -алгебре всех подмножеств \mathbb{N} , заданная формулой $\mu(A) = |A|$ (число элементов в A). Из определения интеграла Лебега легко следует, что $L^p(\mathbb{N}, \mu) = \ell^p$ для всех $1 \leq p \leq \infty$. Согласно задаче 1.10, в данном случае пространства $L^p(\mathbb{N}, \mu)$ не убывают, а возрастают с ростом p . А следующая задача показывает, что в общем случае пространства $L^p(X, \mu)$ при разных p вообще никак не связаны между собой.

1.19. Покажите, что $L^p(\mathbb{R}) \not\subset L^q(\mathbb{R})$ при $p \neq q$.