

Листок 1

Движения

1. Рассмотрим на евклидовой плоскости вращение R_1 вокруг точки $(0, 1)$ на угол $\pi/6$ по часовой стрелке и вращение R_2 вокруг точки $(1, 0)$ на угол $2\pi/3$ против часовой стрелки. Найти центры и углы поворотов вращений R_1R_2 и R_2R_1 .
2. Доказать, что композиция четного (нечетного) числа центральных симметрий в E^2 и E^3 есть параллельный перенос (соответственно, центральная симметрия).
3. Композиция трех отражений в сторонах треугольника (в любом порядке) есть скользящее отражение с длиной сдвига, равной периметру треугольника его высот. Доказать.

Многогранники и многоугольники

4. В пятиугольнике середина каждой стороны соединена с серединами других сторон, которые не имеют с ней общей вершины. Доказать, что середины пяти полученных отрезков образуют пятиугольник, гомотетичный исходному.
5. При каких положительных ε существует тетраэдр с длинами ребер $2, 2, 2, (1 + \varepsilon), (1 + \varepsilon), (1 + \varepsilon)$?
6. Через каждое ребро куба проведена плоскость. Можно ли это сделать так, чтобы проведенные плоскости образовали правильный додекаэдр?
7. Не пользуясь классификацией правильных многогранников, докажите, что число самосовмещений такого многогранника в два раза больше числа его плоских углов.
8. Доказать, что сумма косинусов двугранных углов тетраэдра не превосходит двух.

Решетки

Решеткой называется множество векторов вида $L = me_1 + ne_2$, где m и n — целые числа, а e_1, e_2 — непропорциональные векторы.

Вектор решетки называется коротким, если его длина не превосходит длины любого вектора решетки. Вектор x называется приведенным относительно решетки L , если $\|x + l\| \geq \|x\|$ для любого вектора $l \in L$. Множество приведенных векторов называется областью Вороного решетки L и обозначается $V(L)$.

9. Доказать, что число коротких векторов решетки не больше шести. Нарисовать все решетки с шестью короткими векторами.
10. Доказать, что $V(L)$ является выпуклым, центрально-симметричным k -угольником, и что параллельные переносы плитки $V(L)$ на векторы решетки L образуют замощение евклидовой плоскости.

Замечание. Можно доказать, что $k \leq 6$, aber das ist schwierig.