Листок 01. Срок сдачи 23 сентября 2016

Для сдачи каждой задачи 01.01 — 01.05 необходимо чисто рассказать одному преподавателю столько пунктов этой задачи, сколько преподаватель сочтет нужным выслушать. Задачи со звездочкой сдаются и фиксируются в кондуите, но в баллах не оцениваются.

01.01. a) Докажите, что замыкание интервала есть отрезок;
b) Множества $X, Y \subset \mathbb{R}$ имеют общую предельную точку. Докажите, что 0 является предельной точной множества $\{x - y,\ x \in X, y \in Y\}$;
c) Докажите, что $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ ($\overline{A}$ — замыкание множества A);
d) Придумайте ограниченное множество, имеющее бесконечно много предельных точек, которые ему не принадлежат.
e) Легко придумать множество, имеющее только одну предельную точку. Придумайте множество, множество предельных точек которого имеет ровно одну предельную точку.
f) Множество имеет конечное число предельных точек. Докажите, что дополнение к нему всюду плотно.

01.02. Докажите, что следующие множества всюду плотны на прямой: **a)** $\mathbb{Q}$;
b) $\{\frac{a}{2^n},\ a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$; **c)** $\{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$;
d) числа, которые можно представить бесконечной десятичной дробью, в записи которой семерка используется только конечное число раз.

01.03. a) Придумайте функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывную ровно в одной точке;
b) Придумайте функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, множество точек разрыва которой есть $\{1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$;
c) Придумайте функцию, множество точек разрыва которой есть $\{1/n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$;
d) Функция является неограниченной в любой окрестности каждой из точек $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Может ли эта функция иметь конечный предел в нуле?

01.04. Пусть функции f и g определены на множестве $D \subset \mathbb{R}$, имеющем $\alpha \in \mathbb{R}$ своей предельной точкой. Пусть они имеют в этой точке пределы, равные a и b. Докажите, что
a) f ограничена в некоторой окрестности точки α;
b) если на некоторой окрестности точки α справедливо соотношение $f(x) \leqslant g(x)$, то $a \leqslant b$;
c) можно ли в предыдущем пункте нестрогие неравенства заменить на строгие?
d) $f + g$ также имеет предел в точке α, равный $a + b$;
e) fg также имеет предел в точке α, равный ab;
f) если $b \neq 0$, то f/g также имеет предел в точке α, равный a/b;
g) если $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ в окрестности точки α и $a = b$, то $\lim_{x\to\alpha} h(x)$ также существует и равен a (лемма о двух милиционерах).

01.05. Функция называется бесконечно малой в данной точке (б.м.), если она имеет в этой точке предел, равный 0. Докажите, что:
a) сумма и произведение нескольких б.м. снова есть б.м.;
b) произведение б.м. на функцию, ограниченную в некоторой окрестности данной точки, снова есть б.м.;
c) Верно ли, что произведение fg является неограниченной функцией в достаточно малой окрестности точки α, если $f(x)$ является неограниченной в любой окрестности данной точки, а $g(x)$ имеет в этой точке ненулевой предел?
d) Функция f не ограничена ни в какой окрестности точки a и нигде не принимает значения 0. Верно ли, что $1/f$ является в этой точке б.м.?
e) Докажите, что если функция имеет в точке α два односторонних предела и $\lim_{x\to\alpha+} f(x) = \lim_{x\to\alpha-} f(x) = a$, то функция имеет в точке α предел, и $\lim_{x\to\alpha} f(x) = a$.
f) Докажите, что $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$ тогда и только тогда, когда $1/f$ является б.м. в точке α.
g) Докажите, что если функция имеет в точке α два односторонних предела и $\lim_{x\to\alpha+} f(x) = \lim_{x\to\alpha-} f(x) = a$, то функция имеет в точке α предел, и $\lim_{x\to\alpha} f(x) = a$.

01.07.* Выбирается некоторое множество X на прямой. С множеством можно многократно проделывать следующие две операции: брать замыкание множества и брать его дополнение. Какое наибольшее число разных множеств может таким образом получиться из одного множества X? (найти «рекордное» множество и доказать, что больше нельзя).

01.08.* Докажите, что на поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ нельзя ввести структуру упорядоченного поля.

01.09.* **a)** Пусть K — некоторое поле (например, $\mathbb{Q}$). Докажите, что множество $\mathbb{K}(x)$ рациональных функций вида $P(x)/Q(x)$, где P и Q — многочлены с коэффициентами из K, — поле относительно обычных операций сложения и умножения. (Это задачка по алгебре.)
b) Пусть теперь $\mathbb{K}$ архимедово упорядоченное поле (например, $\mathbb{Q}$). Докажите, что для любой ненулевой рациональной дроби $P(x)/Q(x) \in \mathbb{K}(x)$, существует такое $M \in \mathbb{K}$, что при всех $a > M$ значение дроби $P(a)/Q(a)$ имеет один и тот же знак. [Методом интервалов пользоваться нельзя, так как теоремы о промежуточном значении у нас нет!]
c) Пусть положительными в $\mathbb{K}(x)$ называются рациональные дроби $P(x)/Q(x)$, значения которых положительны при достаточно больших значениях переменной из $\mathbb{K}$. Докажите, что $\mathbb{K}(x)$ — упорядоченное поле и что оно не удовлетворяет аксиоме Архимеда.

01.10.* Докажите, что число $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ есть число иррациональное.

01.11.* Докажите, что отрезок длиной $\sqrt[3]{2}$ нельзя построить циркулем и линейкой.