Теория чисел. Листок I .

Задачи из этого листка принимаются до 27 сентября 2016 года.

1. Как мы доказали на лекции, любое простое число вида $4k+1$ записывается в виде x^2+y^2, где x, y - неотрицательные целые числа. Докажите, что такое представление единственно, с точностью до перестановки слагаемых.

2. Найдите все целые решения уравнения $x^2+1=y^3$.

3. Докажите, что в кольцах $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ любой идеал главный, а в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ - нет. Однако, $\mathbb{Z}[\omega]$, где $\omega=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, - кольцо главных идеалов.

4. Докажите, что нечетное простое число p записывается в виде x^2+3y^2, $x, y \in \mathbb{Z}$, тогда и только тогда, когда $p=3$ или $p \equiv 1 \, mod \, 3$.

5. (а) Докажите, что уравнения $x^2-2y^2=-1$, $x^2-2y^2=1$ имеют бесконечно много решений в целых числах.
(б) Докажите, что для любого простого числа p вида $\pm1+8k$, уравнения $x^2-2y^2=-p$, $x^2-2y^2=p$ имеют бесконечно много решений в целых числах.

6. Докажите, что для любого нечетного простого p,

$$\sum_{i=1}^{p-1}(i/p)=0.$$

((i/p) - символ Лежандра.)

7. Пусть n - ненулевое целое число. Докажите, что существует единственный гомоморфизм $\chi:(\mathbb{Z}/4n\mathbb{Z})^* \to \{1,-1\}$ ($(\mathbb{Z}/4n\mathbb{Z})^*$ - группа обратимых элементов в кольце $\mathbb{Z}/4n\mathbb{Z}$), такой, что для любого нечетного простого числа p, которое не делит n

$$(n/p)=\chi([p]).$$

($[p]$ - класс p в $(\mathbb{Z}/4n\mathbb{Z})^*$.)