Семинар 1

1. Проверьте, что определение группы движений $\mathrm{Isom}(E^1)$ евклидовой прямой E^1 не зависит от выбора системы координат (репера) на E^1. Другими словами, всякое преобразование $g: \ E^1 \to E^1$, сохраняющее расстояние между точками, где расстояние вычисляется в какой-то одной системе координат на E^1, сохраняет расстояние между точками, которое вычисляется в любой другой системе координат на E^1.

2. *Прямой* l в евклидовой плоскости E^2 (с заданной системой координат на ней) назовем множество точек в E^2, координаты (x_1, x_2) которых удовлетворяют линейному уравнению

$$ax_1 + bx_2 + c = 0, \quad \text{где} \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (a, b) \neq (0, 0). \tag{$*$}$$

Расстояние $d(X, Y)$ между точками $X = (x_1, x_2)$ и $Y = (y_1, y_2)$ в E^2, как нам известно, дается формулой

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}. \tag{$**$}$$

Покажите, что существует система координат на прямой l, в которой расстояние между точками $X = (x)$ и $Y = (y)$ прямой, вычисляемое по формуле $d(X, Y) = |x - y|$, совпадает с расстоянием между этими точками, вычисленным по формуле (**). (Тем самым, всякая прямая l в E^2 является евклидовой прямой.)

3. а) Докажите, что расстояние в E^2, вычисляемое по формуле (**), удовлетворяет правилу треугольника

$$d(X, Y) + d(Y, Z) \geq d(X, Z) \qquad \forall X, Y, Z \in E^2.$$

б) Докажите, что последнее неравенство становится строгим равенством тогда и только тогда, когда точки X, Y и Z коллинеарны.

4. Проверьте, пользуясь свойствами скалярного произведения векторов, что угол α при вершине A треугольника ABC, находится по формуле

$$\alpha = \arccos \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AB||AC|}.$$

5. *Отражением в зеркале* l (или *осевой симметрией с осью* l) на плоскости E^2 называется преобразование

$$S_l: \ E^2 \xrightarrow{\sim} E^2, \ X \mapsto X + 2\overrightarrow{XO},$$

где точка O есть основание перпендикуляра к прямой l, проходящего через точку X. *Поворотом $R_{O,\varphi}$ на угол φ около точки O* называется преобразование

$$R_{O,\varphi}: \ E^2 \xrightarrow{\sim} E^2, \ X \mapsto Y, \quad \text{где} \quad \widehat{\overrightarrow{OX}, \ \overrightarrow{OY}} = \varphi, \qquad -\pi < \varphi \leq \pi.$$

(Положительным направлением вращения называется вращение против часовой стрелки.) Покажите, что композиция вращения плоскости E^2 и отражения, зеркало которого проходит через центр вращения, есть снова отражение. Как найти его зеркало?

6. *Скользящим отражением в прямой* l (или: *скользящей симметрией с осью* l) на плоскости называется композиция отражения в прямой l и параллельного переноса в направлении, параллельном прямой l. Докажите, что композиция отражения (осевой симметрии) и параллельного переноса на плоскости есть скользящее отражение.

7. Докажите, что стабилизатор G_x точки $x \in E^n$, $n \leq 2$, определяемый как множество $G_x = \{f \in \mathrm{Isom}(E^n) \mid f(x) = x\}$, является подгруппой группы движений $\mathrm{Isom}(E^n)$.

8. Докажите, что движение плоскости E^2, оставляющее на месте 3 неколлинеарные точки, является тождественным. Что можно сказать о движении E^2, которое оставляет на месте 2 различные точки?

9. Пусть h - отражение плоскости E^2 в зеркале $x + 2y = 1$, а g - вращение вокруг точки $(1, 1)$ на угол $\pi/3$ (против часовой стрелки). Докажите, что ghg^{-1} есть отражение и найдите уравнение его зеркала. (Здесь (x, y) - декартовы координаты в E^2).