

Семинар 2

1. Пусть g и h - движения евклидовой плоскости. Докажите, что $g \circ h \circ g^{-1}$ имеет тот же тип, что и h .

2. Докажите, что в E^2 композиция трех центральных симметрий относительно середин сторон треугольника есть центральная симметрия. Какое движение получится, если рассмотреть композицию n центральных симметрий относительно середин последовательных сторон n -угольника?

3. Докажите, что любое движение плоскости E^2 является композицией не более, чем трех отражений.

4. На катетах a и b прямоугольного треугольника выбираются точки P и Q , из которых опускаются перпендикуляры PK и QH на гипотенузу. Найдите наименьшее значение суммы $|KP| + |PQ| + |QH|$.

5. Пространство с заданной в нем системой координат и с введенным на нем расстоянием $d(X, Y)$ между произвольными точками $X = (x_1, x_2, x_3)$ и $Y = (y_1, y_2, y_3)$ по формуле

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}. \quad (*)$$

называется *евклидовым пространством* и обозначается E^3 . *Движением* пространства E^3 называется всякое преобразование E^3 , сохраняющее расстояние между точками. *Плоскостью* в пространстве E^3 назовем множество точек в E^3 , координаты (x_1, x_2, x_3) которых удовлетворяют линейному уравнению

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0, \quad \text{где } a, b, c \in \mathbb{R}, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0). \quad (**)$$

Покажите, что образ произвольной плоскости в E^3 при любом движении пространства E^3 является плоскостью.

6. Пусть π - плоскость в E^3 . *Отражением в зеркале π* (или *симметрией относительно плоскости π*) в E^3 называется преобразование

$$S_\pi : E^3 \xrightarrow{\sim} E^3, \quad X \mapsto X + 2\overrightarrow{XO},$$

где точка O есть основание перпендикуляра к плоскости π , проходящего через точку X . *Поворотом (вращением) $R_{l, \varphi}$ на угол φ около прямой l в E^3* называется преобразование

$$R_{l, \varphi} : E^3 \xrightarrow{\sim} E^3, \quad X \mapsto Y, \quad -\pi < \varphi \leq \pi,$$

где точка Y получается из X поворотом на угол φ около точки $O = \pi \cap l$ в плоскости π , проходящей через точку X и перпендикулярной к прямой l . Прямая l называется *осью поворота*. Покажите, что а) композиция вращения пространства E^3 и отражения, зеркало которого проходит через ось вращения, есть снова отражение, и найдите его зеркало; б) композиция двух отражений с непараллельными зеркалами есть поворот около прямой пересечения зеркал.

7. *Скольльзящим отражением в зеркале π* (или: *скольльзящей симметрией относительно плоскости π*) в E^3 называется композиция отражения в плоскости π и параллельного переноса в направлении, параллельном плоскости π . Докажите, что композиция отражения (симметрии относительно плоскости) и параллельного переноса (на произвольный вектор) в E^3 есть скольльзящее отражение.

8. *Поворотным отражением* в E^3 называется композиция поворота относительно некоторой прямой l и отражения в зеркале π , перпендикулярном прямой l . *Винтовым движением* называется композиция поворота и параллельного переноса на вектор, сонаправленный оси поворота. В этом случае ось поворота также называется *осью винтового движения*.

а) Покажите, что композиция винтового движения и отражения в зеркале, перпендикулярном оси винтового движения, есть поворотное отражение.

б) В композицию скольких отражений можно разложить винтовое движение?

9. Докажите, что движение пространства E^3 , оставляющее на месте 4 некопланарные точки, является тождественным. Что можно сказать о движении пространства E^3 , которое оставляет на месте 3 неколлинеарные точки?

10. Найдите формулы отражения пространства E^3 в зеркале $x + 2y + z = 1$.