

## Теория струн и КТП. Задачи 2

1. При инфинитезимальной замене параметра на траектории  $t \rightarrow t + \varepsilon(t)$  найти закон преобразования: а) координат частицы  $X^\mu(t)$ , б) одномерной метрики  $e(t)$ .

Показать, что величины  $T = \int_0^1 dt e(t)$ ,  $S_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 dt \frac{\dot{X}^2}{e}$ ,  $S_A = \int_0^1 dt A_\mu(X(t)) \dot{X}^\mu$ ,  $S_\Phi = \int_0^1 dt e(t) \Phi(X(t))$  инвариантны относительно этих преобразований с точностью до граничных членов. При каких условиях на  $\varepsilon(t)$  вклад граничных членов исчезает?

2. Найти одноточечную  $\langle x^i(t) \rangle$  и двухточечную  $\langle x^i(t) x^j(t') \rangle$  корреляционные функции  $\langle x^i(t) x^j(t') \rangle$  в нерелятивистской квантовой механике свободной частицы с действием  $S = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \dot{\mathbf{x}}^2 dt$  и граничными условиями  $x(0) = x_0$ ,  $x(1) = x_1$ .
3. Как решение предыдущей задачи связано с задачей о функции Грина  $G(t, t')$  "оператора Лапласа"  $\Delta = -\frac{d^2}{dt^2}$  на отрезке? Какую нужно выбирать функцию Грина?
4. Вычислить  $\langle \dot{x}^i(t) \rangle$  и  $\langle \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t') \rangle$ . Какой физический смысл полученных выражений? Имеет ли двухточечная функция предел при  $t \rightarrow t'$ , и что это означает?
5. Рассмотрим струну длины  $a$  с закрепленными концами. Лагранжева плотность малых поперечных колебаний струны  $X(\sigma, \tau)$  имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{T}{2} \left[ \left( \frac{\partial X}{\partial \tau} \right)^2 - \left( \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 \right]$$

( $\sigma$  – координата вдоль струны,  $\tau$  – время). Выведите уравнения движения для коэффициентов Фурье  $x_n(\tau)$  разложения

$$X(\sigma, \tau) = \sqrt{2/a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n \sigma}{a}\right) x_n(\tau).$$

Можно ли представить лагранжиан  $L = \int_0^a \mathcal{L} d\sigma$  как функцию Лагранжа бесконечного набора невзаимодействующих гармонических осцилляторов? Если да, найдите их частоты.

6. Вычислить пропагатор свободной частицы

$$\mathcal{K}(X_1, X_0) = \int_0^\infty dT \frac{e^{-\frac{(X_1^\mu - X_0^\mu)^2}{2T} - \frac{m^2}{2} T}}{T^{D/2}}$$

в импульсном представлении с помощью преобразования Фурье. Какому дифференциальному уравнению он удовлетворяет?

7. (\*) Найти корреляционную функцию  $\langle X^\mu(t)X^\nu(t') \rangle$  для частицы на замкнутой траектории  $\tau \sim \tau + 1$  с метрикой  $e(\tau) = T = \text{const}$ .
8. (\*) Вычислить континуальный интеграл для релятивистской частицы

$$Z = \int_{X(0)=X(1)} DeDX e^{-\int_0^1 dt \left( \frac{\dot{X}^2}{2e} + \frac{1}{2}em^2 \right)}$$

Функцией чего является ответ и имеет ли он физический смысл?