Семинар 3

Во всех задачах, кроме задачи 3, мы работаем в евклидовых пространствах E^n, $n \geq 2$.

Скалярное произведение

1. Докажите, что если плоские углы четырехгранного угла равны, то плоскости его диагональных сечений перпендикулярны,

2. Какое максимальное число векторов, попарно образующих неострые углы, можно нарисовать на плоскости?

Линейно независимые векторы и ортогональные семейства

3. В векторном пространстве V над полем K даны линейно независимые векторы $v_1,\ v_2,\ v_3$ и ненулевые скаляры $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in K$. Какому условию должны удовлетворять эти скаляры, чтобы векторы $v_1 + \lambda_1 v_2$, $v_2 + \lambda_2 v_3$ и $v_3 + \lambda_3 v_1$ были линейно зависимы?

4. Докажите, что семейство ненулевых попарно ортогональных векторов линейно независимо. (Векторы a и b называются ортогональными друг другу, если их скалярное произведение равно нулю.)

Окружности, прямые, пучки

5. Две окружности $C_1:\ x^2 + y^2 + f_1 x + g_1 y + h_1 = 0$ (где центр этой окружности?) и

$C_2:\ x^2+y^2+f_2 x+g_2 y+h_2 = 0$ тогда и только тогда пересекаются под прямым углом, когда

$f_1 f_2 + g_1 g_2 = 2(h_1 + h_2)$.

6. Найдите точку пересечения высот в треугольнике, который задан уравнениями своих

сторон: $x - 3y = 1,\ x + y = 10,\ 3x + 7y = 2$.

7. Найдите уравнение:

а) окружности, проходящей через точку $(1, 2)$ и точки пересечения окружностей $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 1$ и $x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x - 3y + \frac{3}{2} = 0$;

б) прямой, проходящей через точки пересечения этих двух окружностей.

Стандартная аналитическая геометрия

8. Найдите проекцию точки (1,1,1) на

а) прямую, проходящую через точки $(1, 2, 3)$ и $(3, 4, 5)$;

б) плоскость, проходящую через точки $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(2, 3, 4)$.

9. Докажите, что прямые $l_1 = \{\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = z\}$ и $l_2 = \{x = t,\ y = -1 - t,\ z = 3t\}$ скрещиваются. Найдите уравнение их общего перпендикуляра,

10.Напишите уравнение поверхности, полученной вращением прямой, проходящей через точки $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, вокруг оси OZ.