

## ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА. ЛИСТОК 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Решение задач 1а,б, 2а-д, 3а-г, 5а-г, 7,8 входит в необходимые условия получения зачета и допуска к экзамену. Последний срок сдачи этих задач – 6 октября.

1. а) Докажите лемму Жордана (или изложите известное доказательство): если на некоторой последовательности дуг окружностей  $|z| = R_n$ ,  $\operatorname{Im} z > a$ , функция  $g(z)$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $\arg z$ , то для любого положительного числа  $\lambda$  предел  $\lim_{R_n \rightarrow \infty} \int_{|z|=R_n, \operatorname{Im} z > a} g(z)e^{i\lambda z} dz = 0$ ;
- б) Для всякого  $a \neq \pm 1$  вычислите интеграл по вертикальной прямой

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^2 - 1} dp.$$

Определение. **Оригиналом** называется функция  $f(t)$  вещественного аргумента  $t$ , удовлетворяющая условиям:

- (1)  $f(t) = 0$  при  $t < 0$
- (2)  $f(t)$  удовлетворяет условию Гельдера всюду, кроме отдельных точек, где она имеет разрывы 1 рода, т.е., для всех  $t$ , кроме отдельных изолированных точек,

$$|f(t+h) - f(t)| < A|h|^a$$

для всех  $h$ ,  $|h| < h_0$  при некоторых положительных  $A$  и  $a$ ;

- (3)  $f(t)$  растет не быстрее некоторой экспоненты, т.е.,  $|f(t)| < M e^{s_0 t}$  для некоторого  $M > 0$  и вещественного  $s_0$ , называемого показателем роста  $f(t)$ .

Преобразованием Лапласа функции (оригинала)  $f(t)$  называется функция комплексного переменного  $p$  (изображение)

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$$

Она аналитична в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > s_0$ . Фраза “функция  $f(t)$  имеет своим изображением  $F(p)$ ” записывается как  $f(t) \div F(p)$  или  $F(p) \div f(t)$ .

2. Пусть  $f(t) \div F(p)$ . Выведите следующие свойства преобразования Лапласа, считая, что все левые части равенств являются оригиналами:

- а) запаздывание оригинала  $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p)$ ,  $\tau > 0$ .
- б) смещение изображения  $e^{p_0 t} f(t) \div F(p-p_0)$ ,
- в) дифференцирование оригинала  $f'(t) \div pF(p) - f(0)$ ,
- г) интегрирование оригинала  $\int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p}$
- д) дифференцирование изображения  $tf(t) \div -F'(p)$
- е) умножение изображений:  $f(t) * g(t) \div F(p)G(p)$ , где  $f(t) * g(t) := \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau$ .

В каких пунктах дополнительное условие на левую часть излишне?

3. Найдите изображения следующих функций, равных нулю при  $t < 0$ , а при  $t > 0$  определяемых формулами:

- а)  $f(t) = e^{\lambda t} \cos t$ , б)  $f(t) = e^{\lambda t} \sin t$ ;
- в)  $f(t) = t^n e^{\lambda t}$ ; г)  $f(t) = e^{At}$ , где  $A$  – матрица;
- д)  $f(t) = \frac{e^{-at}}{\sqrt{t}}$ , е)  $f(t) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{t}$ .

4. Докажите, что всякая рациональная функция  $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ ,  $\deg P < \deg Q$  является изображением некоторого оригинала и этот оригинал может быть найден по формуле  $f(t) = \sum \operatorname{Res} \frac{P(p)}{Q(p)} e^{pt}$ .

5. Используя преобразование Лапласа, найдите решение следующих задач Коши:

- a)  $x'' + 2x' + 5x = e^{-t}$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$ ,
- б)  $x'' + 2x' + 5x = e^{-t}$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ ,
- в)  $x'' + 2x' + 5x = e^{-t}$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ ,
- г)  $x'' + 3x' + 2x = e^{-t}$ ,  $x(1) = 0$ ,  $x'(1) = 0$ .
- д)  $x'' + x = \varphi(t)$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ , где  $\varphi(t) = 1$  при  $0 < t < 2\pi$ ,  $\varphi(t) = 0$  при  $t > 2\pi$
- е)  $x'' + x = \varphi(t)$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ , где  $\varphi(t) = 1$  при  $4n\pi < t < (4n+2)\pi$ ,  $\varphi(t) = 0$  при  $(4n+2)\pi < t < (4n+4)\pi$ ,  $n = 0, 1, \dots$

6. Пусть  $F(p)$  - функция, аналитичная в полуплоскости  $\text{Re } p > s_0$ , стремящаяся к нулю при  $\text{Re } p \rightarrow +\infty$ , такая, что интеграл  $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)dp$  абсолютно сходится для некоторого  $a > s$ . Покажите, что функция

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp$$

является оригиналом, изображение которого совпадет с  $F(p)$ . Описывают ли эти условия все возможные изображения?

*Замечание* Основное нетривиальное место доказательства – использование равномерной сходимости внутреннего интеграла для перестановки порядков интегрирования в двойном интеграле  $\int_0^\infty dt e^{-pt} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dq F(q)e^{qt}$ , где  $p$ ,  $\text{Re } p > a > s_0$  фиксировано.

7. Пользуясь задачей 3г, вычислите при помощи преобразования Лапласа матричную экспоненту  $e^{At}$  для матрицы  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ; решите задачу Коши  $x'(t) = Ax$ ,  $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

8. В электрическом контуре с активным сопротивлением  $R = 1$ , катушкой индуктивности  $L = 4$  и конденсатором емкости  $C = 1$  с начальным зарядом  $q_0 = 0.5$  (в нулевой момент времени) включен источник переменного тока, создающий на своем выходе напряжение  $E = \cos t$ . Вычислите значение тока, проходящего через активное сопротивление в момент времени  $t$ . В начальный момент времени ток нулевой.

