Математический анализ. 1 курс. Листок 2. Срок сдачи 07 октября 2016

Для сдачи каждой из задач 2.1 — 2.6 необходимо чисто рассказать одному преподавателю столько пунктов этой задачи, сколько преподаватель сочтет нужным выслушать. Задачи со звездочкой сдаются и фиксируются в кондуите, но в баллах не оцениваются.

2.1. Докажите свойства пределов последовательностей, исходя из явного определения предела последовательности.
a) Если $a_n \geqslant b_n$ и существуют пределы $A = \lim a_n$ и $B = \lim b_n$, то $A \geqslant B$.
b) Если $a_n \geqslant b_n \geqslant c_n$ и существуют пределы $A = \lim a_n = \lim c_n$, то существует предел $\lim b_n$ и $\lim b_n = A$.
c) Если существуют пределы $A = \lim a_n$ и $B = \lim b_n$, то существует предел $\lim a_n b_n = AB$; если $B \neq 0$, то существует предел $\lim a_n/b_n = A/B$.
d) Обратная к бесконечно малой последовательности есть бесконечно большая и наоборот.
e) Сумма ограниченной последовательности и бесконечно большой есть бесконечно большая.
f) Если последовательность a_n имеет конечный предел, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N}\ \forall m, n > M$ справедливо $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

2.2. a) Если последовательность b_n имеет предел B, то любая её подпоследовательность сходится и имеет тот же предел B.
b) Пусть последовательность a_n принимает значение b бесконечное число раз, причем a_n имеет предел. Докажите, что этот предел есть b.
c) Пусть b есть предельная точка множества X. Тогда существует последовательность точек множества X, сходящаяся к b.
d) Пусть множество значений последовательности бесконечно. Верно ли, что если это множество имеет ровно одну предельную точку, то последовательность имеет предел? Верно ли обратное: если такая последовательность имеет предел, то множество её значений имеет ровно одну предельную точку? Какими будут ответы, если дополнительное потребовать, что последовательность принимает каждое значение ровно один раз?
e) Подпоследовательность монотонной последовательности имеет предел. Докажите, что сама последовательность тогда тоже имеет предел.

2.3. a) Докажите, что если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.
b) Может ли функция быть дифференцируема в точке, если в остальных точках она разрывна?
c) Функция дифференцируема в окрестности точки. Может ли ее производная быть разрывна в этой точке?
d) Функция дифференцируема в окрестности точки. Может ли ее производная быть неограничена в любой окрестности этой точки?
e) Функция f определена в окрестности точки a и дифференцируема в точке a. Прямая $y = kx + b$ проходит через точку $(a, f(a))$, причём график функции f весь лежит по одну сторону от этой прямой. Докажите, что $f'(a) = k$.

2.4. Пусть функции f и g являются бесконечно малыми при стремлении x к a.
a) Пусть $a = 0$. Докажите все верные импликации между следующими тремя утверждениями и приведите примеры для каждой неверной импликации.
(1) $f(x) = o(x)$; (2) $f(x) = O(x^2)$;
(3) f дифференцируема в нуле и $f(0) = f'(0) = 0$.
b) Пусть $f = O(g)$. Следует ли из этого, что f и g бесконечно малые одного порядка (то есть $f \sim \lambda g$ при подходящей константе λ)? Верно ли обратное?
c) Докажите, что $f \sim g$ равносильно тому, что $f - g = o(f)$.

2.5. Докажите, что определения предела функции по Коши и по Гейне равносильны.

2.6. a) Докажите школьную теорему о сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
b) Дана периодическая последовательность цифр a_n. Докажите, что последовательность $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}$ имеет предел. (Подсказка: полезно 2.2.e.)
c) Доказать, что последовательность

$$x_1 = \sqrt{6}, \quad x_2 = \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \ \ldots, \ x_n = \overbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}}}^{n \text{ раз корень}}$$

сходится и найти её предел.

2.7.* Существует ли последовательность, принимающая каждое свое значение только один раз, такая что любой её член является пределом некоторой её подпоследовательности?

2.8.* Всякая ли последовательность содержит монотонную подпоследовательность?

2.9.* **a)** Функция f дифференцируема в окрестности U точки a и имеет в точке a единственный строгий максимум, т.е. $\forall x \in U$, $x \neq a$, $f(x) < f(a)$. Верно ли, что найдется такое ε, что f монотонно возрастает на $(a - \varepsilon, a)$ и монотонно убывает на $(a, a + \varepsilon)$?
b) Функция дифференцируема в окрестности точки и её производная в этой точке положительна. Следует ли из этого, что функция монотонна в некоторой окрестности этой точки?