Семинар 4

Базисы и порождающие наборы векторов в векторных пространствах

1. Набор векторов $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ называется *порождающим* векторное пространство V, если каждый вектор из V линейно выражается через векторы $v_1, v_2, ..., v_m$. Докажите, что:

а) набор векторов $\{e_\nu\}$, порождающий векторное пространство V, тогда и только тогда является базисом, когда он линейно независим;

б) если векторы $v_1, v_2, ..., v_m$ порождают V, а векторы $e_1, ..., e_k$ линейно независимы, то $m \geq k$ и некоторые k из векторов v_i можно заменить на векторы $e_1, ..., e_k$ так, что полученный набор векторов останется порождающим;

в) любой порождающий набор векторов содержит в себе некоторый базис;

г) любые два базиса одного пространства равномощны;

д) любой линейно независимый набор векторов можно дополнить до базиса.

Примеры векторных пространств и базисов

2. Сколько всего в n-мерном векторном пространстве над конечным полем из q элементов:

а) векторов ?

б) упорядоченных наборов из к линейно независимых векторов ?

3. (Пространства многочленов). Укажите базис и найдите размерность пространства:

а) многочленов степени $\leq n$ от m переменных;

б) однородных многочленов степени d от m переменных;

4. Дано $m+1$ попарно разных чисел $a_0, a_1, ..., a_m \in \mathbf{k}$. Постройте в пространстве многочленов степени $\leq m$ из $\mathbf{k}[x]$ такой базис, в котором координатами многочлена f являются:

а) значения f в точках a_i;

б) значения f и его первых m производных в точке a_0.

Подпространства векторных пространств

5. *Подпространством* векторного пространства V называется всякое подмножество U в V, которое само является векторным пространством относительно операций сложения векторов и умножения их на скаляры, определенные в V. Пусть U и V - подпространства векторного пространства W. *Суммой подпространств U и V* называется множество векторов $U + V = \{u + v \mid u \in U,\ v \in V\}$.

а) Убедитесь, что $U + V$ и $U \cap V$ являются подпространствами векторного пространства V.

б) Векторное пространство называется *конечномерным*, если в нем существует базис. *Размерностью* $\dim V$ конечномерного пространства V называется число векторов произвольного базиса в V. Пусть пространство W конечномерно. Докажите, что

$$\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V).$$

Линейные операторы

6. *Линейным оператором* в векторном пространстве V над полем $\mathbf{k}$ называется всякое линейное отображение $f : V \to V$. *Ядром* линейного оператора $f : V \to V$ называется множество $\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$. Вектор $0 \neq v \in V$ называется *собственным вектором* линейного оператора f, если $\lambda \in \mathbf{k}$ $f(v) = \lambda v$. Скаляр λ называется *собственным числом* линейного оператора f. Для этого λ подмножество $V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$ пространства V называется *собственным подпространством* в V, соответствующим собственному числу λ.

а) Проверьте, что собственные подпространства линейного оператора в V являются подпространствами пространства V. Является ли ядро оператора f собственным подпространством в V?

б) Пусть V_{λ_1} и V_{λ_2} - собственные подпространства в V, соответствующие двум различным собственным числам λ_1 и λ_2 линейного оператора f. Докажите, что $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$.

в) Пусть e_1, e_2 - базис в V. Зададим линейный оператор f в V равенствами $f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = 4e_1$. Найдите собственные числа и собственные подпространства оператора f. Найдите ядро f.