2.1. Докажите, что нормированное пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда в нем есть плотное векторное подпространство не более чем счетной размерности.

2.2. Докажите, что пространства c_0, $C[a,b]$, ℓ^p, $L^p[a,b]$, $L^p(\mathbb{R})$ при $p<\infty$ сепарабельны, а ℓ^∞, $C_b(\mathbb{R})$, $L^\infty[a,b]$ и $L^\infty(\mathbb{R})$ несепарабельны.

2.3. Пусть $\alpha=(\alpha_n)\in\ell^\infty$, и пусть $X=\ell^p$ или c_0. *Диагональный оператор* $M_\alpha\colon X\to X$ переводит вектор $x\in X$ в вектор $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in X$.
(a) Докажите, что M_α ограничен. **(b)** Вычислите его норму.

2.4. Зафиксируем точку $t_0\in[a,b]$ и рассмотрим линейный функционал

$$F\colon (C[a,b],\|\cdot\|_p)\to\mathbb{K},\quad F(x)=x(t_0).$$

(a) При каких $p\in[1,+\infty]$ функционал F ограничен? **(b)** Найдите его норму.

2.5. Пусть $X=(C[a,b],\|\cdot\|_p)$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$, и пусть $f\in C[a,b]$. *Оператор умножения* $M_f\colon X\to X$ действует по правилу

$$M_f(g)=fg\qquad(f\in X).$$

(a) Докажите, что M_f ограничен. **(b)** Вычислите его норму.

2.6. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, и пусть $f\colon X\to\mathbb{K}$ — существенно ограниченная измеримая функция. Зафиксируем $p\in[1,+\infty]$. *Оператор умножения* $M_f\colon L^p(X,\mu)\to L^p(X,\mu)$ действует по правилу

$$M_f(g)=fg\qquad(f\in L^p(X,\mu)).$$

(a) Докажите, что M_f ограничен. **(b)** Вычислите его норму.

2.7. Пусть $X=L^p[0,1]$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$. Определим оператор $T\colon X\to X$ формулой

$$(Tf)(x)=\int_0^x f(t)\,dt\qquad(f\in X).$$

(a) Докажите, что T ограничен. **(b)** Для $p=1$ и $p=\infty$ вычислите его норму.
Анонс: для $p=2$ норма этого оператора равна $2/\pi$. В свое время мы это сможем доказать.

2.8. Пусть $I=[0,1]$, и пусть $K\in C(I\times I)$. *Интегральный оператор* $T\colon C(I)\to C(I)$ задается формулой

$$(Tf)(x)=\int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy.$$

Докажите, что T действительно отображает $C(I)$ в $C(I)$, что он ограничен, и что $\|T\|\leqslant\|K\|_\infty$.

2.9. Пусть (X,μ) — пространство с мерой, и пусть $K\in L^2(X\times X,\mu\times\mu)$. *Интегральный оператор Гильберта–Шмидта* $T\colon L^2(X,\mu)\to L^2(X,\mu)$ задается формулой

$$(Tf)(x)=\int_X K(x,y)f(y)\,d\mu(y).$$

Докажите, что T действительно отображает $L^2(X,\mu)$ в $L^2(X,\mu)$, что он ограничен, и что $\|T\|\leqslant\|K\|_2$.

2.10. Линейный функционал F на $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ задан формулой

$$F(f) = 2f(0) - 3f(1) + \int_0^1 f(t)\,dt.$$

(a) Докажите, что F ограничен. **(b)** Вычислите $\|F\|$.

2.11. Пусть X, Y — нормированные пространства, причем X конечномерно. Докажите, что любой линейный оператор $T\colon X \to Y$ ограничен.

2.12. Постройте линейные изометрические вложения **(a)** $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ в $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$, **(b)** ℓ^∞ в $C_b(\mathbb{R})$, **(c)** c_0 в $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$.

2.13. Пусть X, Y — нормированные пространства. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ называется *коизометрией*, если он отображает открытый единичный шар пространства X на открытый единичный шар пространства Y.
(a) Докажите, что если T отображает замкнутый единичный шар пространства X на замкнутый единичный шар пространства Y, то T — коизометрия.
(b) Верно ли обратное утверждение?
(c) Докажите, что инъективная коизометрия — это то же самое, что изометрический изоморфизм.

2.14. Пусть $\alpha \in \ell^\infty$, и пусть $X = \ell^p$ или c_0. При каких условиях на α диагональный оператор $M_\alpha\colon X \to X$ **(a)** топологически инъективен; **(b)** открыт; **(c)** изометричен; **(d)** коизометричен?

2.15. Ответьте на те же четыре вопроса для оператора умножения из задачи 2.6.