Теория чисел. Листок II .

Задачи из этого листка принимаются до 17 октября 2016 года.

1. Докажите, что любая единица в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$ имеет вид $\pm(1-\sqrt[3]{2})^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Найдите образующие группы единиц кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{19}]$.

3. Найдите все целые решения уравнения $3x^2 - 4y^2 = 11$.

4. Пусть d - целое положительное число не являющееся полным квадратом. Докажите, что существует рациональное число $\frac{x}{y}$ тако, что

$$|\sqrt{d} - \frac{x}{y}| < \frac{1}{2y^2}.$$

(Указание: воспользуйтесь теоремой Дирихле о единицах.)

5. Пусть $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ - неприводимый многочлен с целыми коэффициентами α_i, $(1 \leq i \leq n)$, - его комлексные корни. Допустим, что для любого всех i

$$|\alpha_i| = 1.$$

Докажите, что все α_i - корни из 1.

6. Пусть K - поле, характестика которого отлична от 2, $a, b \in K^*$. Алгебра обобщенных кватернионов $H_{a,b}(K)$ это алгебра над K с образующими i, j и соотношениями $ij = -ji$, $i^2 = a$, $j^2 = b$. Обозначим $k := ij$.
(а) Докажите, что $N(x + yi + zj + tk) = (x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2)^2$.
(б) Докажите, что $H_{a,b}(K)$ - либо алгебра с делением, либо матричная алгебра $Mat_2(K)$.
(в) Докажите, что $H_{a,b}(K) \xrightarrow{\sim} Mat_2(K)$ тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$ имеет ненулувое решение в K.

7. Пусть $A \subset H_{-1,-1}(\mathbb{Q})$ - подкольцо порожденное i и j: $A = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z} + j\mathbb{Z} + k\mathbb{Z}$.
(а) Докажите, что $Cl(A)$ состоит из двух элементов.
(б) Докажите, что для любого ненулевого идеала $I \subset A$ мощность фактора A/I либо полный квадрат, либо имеет вид $2n^2$, $n \in \mathbb{Z}$.
Более того, $|A/I|$ - полный квадрат тогда и только тогда, когда I - главный идеал.
(в) Докажите, что для любого нечетного простого числа p

$$A/pA \xrightarrow{\sim} Mat_2(\mathbb{F}_p).$$

(г) Докажите, что для любого простого p существует идеал $I \subset A$ с $|A/I| = p$. Сколько таких идеалов? (Указание: как устроены идеалы в $Mat_2(\mathbb{F}_p)$?)
(д) Выведите из предыдущего пункта, что любое положительное целое число представляется как сумма 4 квадратов целых чисел.

8. Вычислите группу классов идеалов для кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

9. Какие простые числа могут быть записаны в виде $x^2 + 5y^2$? А какие целые числа могут быть записаны в таком виде?

10. Порядок $A \subset D$ в алгебре с делением называется максимальным, если он не содержится в качестве собственного подмножества в другом порядке. Заметим, что если A - максимальный порядок и $0 \neq a \in D$, то aAa^{-1} - тоже максимальный порядок.

(а) Постройте максимальный порядок в $\subset H_{-1,-1}(\mathbb{Q})$ и докажите, что все максимальные порядки в этой алгебре сопряжены.
(б) Докажите, что для любой конечномерной алгебры с делением над $\mathbb{Q}$ множество максимальных порядков по модулю сопряжения конечно.