Семинар 5

Стандартная аналитическая геометрия

1. Найдите проекцию точки (1,1,1) на

а) прямую, проходящую через точки $(1,2,3)$ и $(3,4,5)$;

б) плоскость, проходящую через точки $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(2,3,4)$.

2. Докажите, что прямые $l_1 = \{\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = z\}$ и $l_2 = \{x = t,\ y = -1-t,\ z = 3t\}$ скрещиваются. Найдите уравнение их общего перпендикуляра,

3. Напишите уравнение поверхности, полученной вращением прямой, проходящей через точки $(1,0,0)$, $(1,1,1)$, вокруг оси OZ.

Подпространства векторных пространств

4. *Подпространством* векторного пространства V называется всякое подмножество U в V, которое само является векторным пространством относительно операций сложения векторов и умножения их на скаляры, определенные в V. Пусть U и V - подпространства векторного пространства W. *Суммой подпространств* U *и* V называется множество векторов $U + V = \{u + v \mid u \in U,\ v \in V\}$.

а) Убедитесь, что $U + V$ и $U \cap V$ являются подпространствами векторного пространства V.

б) Векторное пространство называется *конечномерным*, если в нем существует базис. *Размерностью* $\dim V$ конечномерного пространства V называется число векторов произвольного базиса в V. Пусть пространство W конечномерно. Докажите, что

$$\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V).$$

Линейные операторы

5. *Линейным оператором* в векторном пространстве V над полем $\mathbf{k}$ называется всякое линейное отображение $f : V \to V$. *Ядром* линейного оператора $f : V \to V$ называется множество $\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$. *Образом* линейного оператора $f : V \to V$ называется множество $\mathrm{im} f = \{v \in V \mid \exists\ u \in V \textit{ такой, что } v = f(u)\}$.

а) Проверьте, что $\ker f$ и $\mathrm{im} f$ являются подпространствами в V. Докажите, что если V конечномерно, то размерности этих подпространств связаны с размерностью пространства V соотношением $\dim V = \dim\ker f + \dim \mathrm{im} f$.

б) Вектор $0 \neq v \in V$ называется *собственным вектором* линейного оператора f, если $\lambda \in \mathbf{k}$ $f(v) = \lambda v$. Скаляр λ называется *собственным числом* линейного оператора f. Для этого λ подмножество $V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$ пространства V называется *собственным подпространством* в V, соответствующим собственному числу λ.

Проверьте, что собственные подпространства линейного оператора являются подпространствами пространства V. Является ли ядро оператора f его собственным подпространством?

в) Пусть V_{λ_1} и V_{λ_2} - собственные подпространства в V, соответствующие двум различным собственным числам λ_1 и λ_2 линейного оператора f. Докажите, что $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$.

г) Пусть e_1, e_2 - базис в V. Зададим линейный оператор f в V равенствами $f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = 4e_1$. Найдите собственные числа и собственные подпространства оператора f. Найдите ядро f.