1 Вводная лекция

2 Квантование: частицы и струны

2.1 Релятивистская частица

Квадратичное действие

$$S[X] \to S[X,e] = \tfrac{1}{2}\int d\tau \frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e(\tau)} - \tfrac{1}{2}m^2 \int e(\tau) d\tau \tag{2.1}$$

инвариантное относительно репараметризаций

$$\delta X^\mu = \xi \dot{X}^\mu, \qquad \delta e = \frac{d}{d\tau}(\xi e) \tag{2.2}$$

с локальным параметром $\xi = \xi(\tau) = \tau - f(\tau)$. Уравнения движения включают связь

$$\frac{\delta S}{\delta e} = -\frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e^2} - m^2 = 0 \tag{2.3}$$

которую *необходимо* учитывать при квантовании. Основные вопросы при квантовании:

- пространство состояний системы;
- как происходит динамика - выбор времени;
- кто такие наблюдаемые величины.

Для нерелятивистской (тем более свободной!) частицы с действием $S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} dt\ m\dot{\mathbf{q}}^2$ ответы на все вопросы очевидны:

- пространство состояний - например функции $\psi(\mathbf{q})$, или фурье образы $\tilde{\psi}(\mathbf{p})$, т.е. функции импульсов $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i/m$;
- время t задано изначально. Динамика определяется каноническим гамильтонианом $H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$;
- наблюдаемые величины: в классике - функции на фазовом пространстве $f(q,p)$ - превращаются в дифференциальные операторы в силу канонических коммутационных соотношений
$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{2.4}$$
т.е., например $p_i \to \hat{p}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_i}$.

Что возникает при наивном подходе в релятивистском случае? Посмотрим на действие формально и перейдем к гамильтонову формализму, *считая временем* параметр на мировом листе, тогда

$$P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{\dot{X}_\mu}{e}, \qquad p_e = 0, \qquad \frac{dP_\mu}{d\tau} = 0 \tag{2.5}$$

однако в силу связи

$$P_\mu P^\mu + m^2 = 0 \tag{2.6}$$

состояния определяются, например, лишь пространственными компонентами импульса. Другими словами, пространство состояний может быть описано функциями $\phi_\pm(\mathbf{p})$, которые естественным образом связаны с решениями уравнения Клейна-Гордона.

Действительно, канонические коммутационные соотношения в данном случае ($\hbar = 1$)

$$[X^\mu, P_\nu] = i\delta^\mu_\nu \tag{2.7}$$

релятивистски-ковариантны ($[X^\mu, P^\nu] = i\eta^{\mu\nu}$, $[X_\mu, P_\nu] = i\eta_{\mu\nu}$), и если описывать пространство состояний в координатном представлении, то $P_\mu = -i\frac{\partial}{\partial X^\mu} \equiv -i\partial_\mu$ и на волновую функцию возникает связь

$$\left(-\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\phi(X) = 0 \tag{2.8}$$

буквально представляющая из себя уравнение Клейна-Гордона. Его решение

$$\begin{aligned} \phi(X) &= \int d^4P e^{-iPX}\tilde{\phi}(P) = \int d^4P e^{-iPX}\delta(P^2+m^2)\breve{\phi}(P) = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\mathcal{E}(\mathbf{p})}\left(e^{i\mathcal{E}(\mathbf{p})t - i\mathbf{p}\mathbf{x}}\phi_+(\mathbf{p}) + e^{-i\mathcal{E}(\mathbf{p})t - i\mathbf{p}\mathbf{x}}\phi_-(\mathbf{p})\right) \end{aligned} \tag{2.9}$$

представляет собой два набора волн-частиц (одночастичных состояний с $\mathcal{E}_\pm = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \equiv \pm\mathcal{E}(\mathbf{p})$), локализованных на массовой поверхности

$$\mathcal{E}^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \tag{2.10}$$

Заметим, что наивный гамильтониан

$$\mathcal{H} = P_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L} = \tfrac{1}{2}e\left(P_\mu P^\mu + m^2\right) \tag{2.11}$$

в силу уравнения связи просто равен нулю. Таким образом динамика по параметру τ на мировой линии “уж совсем тривиальна”, но несмотря на это мы в дальнейшем все равно будем его обзывать “мировым временем” и иногда даже обозначать $\tau \to t$.

2.2 Евклидово действие и континуальный интеграл

Интеграл по путям в релятивистской евклидовой квантовой механике $\sum \exp\left(\frac{i}{\hbar}S\right) \to \sum \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S_E\right)$ естественно формально записать как

$$\mathcal{K}(X_1, X_0) = \int DeDX\ e^{-\int_0^1 dt\left(\frac{\dot{X}^2}{2e}+\frac{1}{2}em^2\right)} = \int De\ e^{-\frac{m^2}{2}\int_0^1 dte} \int DXe^{-\int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2e}} \tag{2.12}$$

где мы выделили гауссов интеграл во внешней одномерной метрике $e(t)$. Заметим сразу, что в силу репараметризационной инвариантности можно надеяться, что интеграл по одномерным метрикам так или иначе сведется к интегралу по длинам траекторий $T = \int_0^1 dte$ (т.е. в частности от самой длины траектории T, аналога $t_1 - t_0$ в нерелятивистском случае, вообще не будет зависеть!).

Об этом подробно поговорим дальше, а сначала рассмотрим гауссов интеграл по координатам, в котором сразу выберем $e(t) = T$

$$I(T) = \int DXe^{-\int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2T}} \tag{2.13}$$

Пусть для определенности $X(t)$ определена на отрезке $t \in [0,1]$ с нулевыми граничными условиями $X(0) = 0$ и $X(1) = 0$ [1]. Для того чтобы разобраться с такими интегралами разделим задачу на две части: вычисление корреляционных функций и вычисление детерминантов, которые легче всего сначала продемонстрировать в конечномерной ситуации.

2.3 Гауссовы интегралы

- Начнем с интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dxe^{-x^2} = \sqrt{\pi} \tag{2.14}$$

  Указание: вычислить квадрат интеграла $I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} dxdye^{-(x^2+y^2)}$.

- С помощью замены переменной вычисляем

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dxe^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} \tag{2.15}$$

[1] Легко доказать, что для произвольных $X(0) = X_0$ и $X(1) = X_1$ сдвинув переменную интегрирования

$$X(t) = Y(t) + X_0 + \frac{X_1 - X_0}{T}t$$

и считая, что при линейном сдвиге $DX = DY$, мы получим, что

$$\int_{X(0)=X_0, X(1)\ =X_1} DXe^{-\int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2T}} = e^{-\frac{(X_1-X_0)^2}{2T}} I(T)$$

- Тривиально многомерное обобщение

$$I(a_1,\ldots,a_n)=\int_{\mathbb{R}^n}dx_1\ldots dx_n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_ix_i^2}=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\prod_{i=1}^n a_i} \tag{2.16}$$

с помощью которого легко понять формулу

$$I(A)=\int_{\mathbb{R}^n}dx_1\ldots dx_n e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j}A_{ij}x_ix_j}=\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \tag{2.17}$$

В последнем случае существенно, что матрицу A можно считать симметричной $A_{ij}=A_{ji}$, и диагонализовать ортогональным преобразованием [2].

Вычислим теперь

$$I(a|b)=\int_{-\infty}^{+\infty}dxe^{-\frac{1}{2}ax^2+bx}=e^{b^2/2a}\sqrt{\frac{2\pi}{a}} \tag{2.18}$$

и его очевидное обобщение

$$\begin{aligned}I(A|\mathbf{b})&=\int_{\mathbb{R}^n}d^n\mathbf{x}\; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j}A_{ij}x_ix_j+\sum_i b_ix_i}=\\&=e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j}b_iA^{-1}_{ij}b_j}\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}}\end{aligned} \tag{2.19}$$

Замечания:

1. Пусть квадратичное “действие” $S(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\sum_{i,j}A_{ij}x_ix_j-\sum_i b_ix_i$. Найдем условие его экстремума

$$\frac{\partial S}{\partial x_k}=\sum_j A_{kj}x_j-b_k=0,\qquad k=1,\ldots,n \tag{2.20}$$

с решением $X_i=\sum_j A^{-1}_{ij}b_j$. На решении $S(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}}=-\frac{1}{2}\sum_{i,j}b_iA^{-1}_{ij}b_j$, т.е.

$$\frac{I(A|\mathbf{b})}{I(A|0)}=\exp(-\,S(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}}) \tag{2.21}$$

где правая часть определяется минимальным значением действия - основным вкладом в интеграл.

[2] А что делать если $a_j<0$ или $a_j=0$?

2. Легко определить (и вычислить!) "корреляторы"

$$\begin{aligned}\langle x_{i_1}\dots x_{i_k}\rangle &= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\; x_{i_1}\dots x_{i_k} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j}A_{ij}x_ix_j}}{\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{x}\; e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j}A_{ij}x_ix_j}} = \\ &= \frac{\partial^k}{\partial b_{i_1}\dots\partial b_{i_k}}\, \frac{I(A|\mathbf{b})}{I(A|0)}\bigg|_{\mathbf{b}=0} = \frac{\partial^k}{\partial b_{i_1}\dots\partial b_{i_k}}\, e^{\frac{1}{2}\sum_{i,j}b_iA^{-1}_{ij}b_j}\bigg|_{\mathbf{b}=0}\end{aligned} \tag{2.22}$$

Из правой части (2.22) видно, что любые корреляторы в гауссовой модели выражаются через парные: теорема Вика.

Из правой части (2.22) видно, что любые корреляторы в гауссовой модели выражаются через парные: теорема Вика. В частности, из (2.22) следует

$$\begin{gathered}\langle x_i\rangle = 0, \quad \langle x_ix_j\rangle = A^{-1}_{ij}, \quad \langle x_ix_jx_k\rangle = 0 \\ \langle x_ix_jx_kx_l\rangle = A^{-1}_{ij}A^{-1}_{kl} + A^{-1}_{ik}A^{-1}_{jl} + A^{-1}_{il}A^{-1}_{jk}\end{gathered} \tag{2.23}$$

т.е. что нормированная двухточечная функция равна ядру обратного оператора, а все остальные - через нее выражаются (как будут выглядеть аналогичные формулы для случая нечетных переменных?). При этом мы использовали неявно, что:

- У матрицы A_{ij} все собственные значения положительны, в частности нет нетривиальных решений уравнения $\sum_j A_{ij}x_j = 0$ и существует A^{-1}.
- Если существуют $a_j < 0$ или $a_j = 0$, то надо разбить пространство J, $j \in J$ на $J = J_0 \oplus J_\perp$, и искать обратный оператор на $J_\perp$.

В случае даже свободной теории бозонных полей нам приходится рассматривать операторы или их корреляционные функции, т.е. средние типа $\langle \mathrm{Pol}(X, \partial X, \dots)\rangle$ в смысле гауссова интеграла. В отличие от конечномерного случая это может приводить к нетривиальным неожиданностям - уже в теории частицы.

2.4 Корреляционные функции в одномерии

Вернемся к интегралам по траекториям

$$\begin{gathered}I(T|X_1, X_0) = \int_{X(0)=X_0, X(1)\ =X_1} DX e^{-\int_0^T dt \frac{\dot{X}^2}{2}} = e^{-\frac{(X_1-X_0)^2}{2T}} I(T) \\ I(T) = \int_{X(0)=X(1)=0} DX e^{-\int_0^T dt \frac{\dot{X}^2}{2}}\end{gathered} \tag{2.24}$$

с фиксированными граничными условиями, которые отличаются именно тем, что оператор $A \to \Delta = -\frac{d^2}{dt^2}$ вообще говоря имеет нетривиальную нулевую моду $\Delta X = 0$, но только не при нулевых граничных условиях. Поэтому обратный оператор

$$-\frac{d^2}{dt^2}G(t,t') = \delta(t-t') \tag{2.25}$$

проще искать именно при условии, что $G(0,t') = G(T,t') = 0$, $0 < t' < T$. (Мы переопределили параметр на мировой линии $\tau = t/T$, так что $0 < t < T$).

Смысл этой функции очевиден из полного аналога конечномерного рассуждения. Рассмотрим теперь $I(T|j) = \int_{X(0)=X(1)=0} DXe^{-\int_0^T dt\frac{\dot{X}^2}{2}+\int_0^T dtj(t)X(t)}$ и сделаем в нем подстановку $X(t) = \tilde{X}(t) + \int G(t,t')j(t')dt'$, тогда

$$\begin{aligned} I(T|j) = \int_{X(0)=X(1)=0} DXe^{-\int_0^T dt\frac{\dot{X}^2}{2}+\int_0^T dtj(t)X(t)} = \\ = \exp\left(\tfrac{1}{2}\int dtdt'j(t)G(t,t')j(t')\right)\int_{\tilde{X}(0)=\tilde{X}(1)=0} D\tilde{X}e^{-\int_0^T dt\frac{\dot{\tilde{X}}^2}{2}} = \\ = \exp\left(\tfrac{1}{2}\int dtdt'j(t)G(t,t')j(t')\right)I(T|0) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Поэтому

$$G(t,t') = \langle X(t)X(t')\rangle = \frac{1}{I(T|0)}\;\frac{\delta^2}{\delta j(t)\delta j(t')}I(T|j)\bigg|_{j=0} \tag{2.27}$$

равна двухточечной корреляционной функции. Отметим сразу, что

- Рассуждение не зависит от размерности: мировой линии, мирового листа, мирового объема итп.

- Точно такое же рассуждение годится и для интеграла по грассмановым переменным, поэтому корреляционные функции свободных фермионных полей можно вычислять так же как и для бозонных (аккуратно учитывая нечетность - или изменения знака пре перестановках).

Задачу эту можно (и предстоит!) решить многими способами. Приведем однако сразу ответ в форме Фейнмана

$$\langle X(t)X(t')\rangle = \begin{cases} \dfrac{t(T-t')}{T}, & t < t' \\ \dfrac{t'(T-t)}{T}, & t > t' \end{cases} \tag{2.28}$$

и в форме Полякова

$$\langle X(t)X(t')\rangle = -\tfrac{1}{2}|t-t'| + \tfrac{1}{2}(t+t') - \frac{tt'}{T}, \quad 0<t,t'<T \tag{2.29}$$

Из второго выражения видно например, что коррелятор скоростей

$$\langle \dot X(t)\dot X(t')\rangle = \delta(t-t') - \frac{1}{T}, \quad 0<t,t'<T \tag{2.30}$$

откуда следует, что средний квадрат скорости $\langle \dot X(t)^2\rangle$ квантовой частицы является плохо определенной величиной [3]. Основные задачи, оставшиеся в одномерном случае

- Обосновать ответ (2.28), (2.29). Получить его, например, методом Фурье (спектральная теория оператора Лапласа?).

- Вычислить формулу $\langle X(t)X(t')\rangle$ для периодических граничных условий $t\sim t+T$. В данном случае уравнение (2.25) нужно модифицировать

$$-\frac{d^2}{dt^2}G(t,t') = \delta(t-t') - \frac{1}{T} \tag{2.31}$$

2.5 Детерминанты для релятивистских частиц

В пространстве таких функций можно выбрать естественный базис, и любую функцию представить как

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sin(\pi k t), \quad \dot X(t) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k x_k \cos(\pi k t) \tag{2.32}$$

Тогда

$$S[X] = \int_0^1 dt \frac{\dot X^2}{2T} = \frac{\pi^2}{2T}\sum_{k,l=1}^{\infty} k x_k l x_l \int_0^1 dt \cos(\pi k t)\cos(\pi l t) = \frac{\pi^2}{4T}\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x_k^2 \tag{2.33}$$

а меру интегрирования было бы естественно определить как $DX = \mathcal{N}\prod_{k=1}^{\infty} dx_k$, где $\mathcal{N} = \mathcal{N}(T)$ - некоторая “нормировочная” постоянная. Строго говоря, так поступать нельзя - в том смысле, что константа $\mathcal{N}$ окажется “особой”, так как интегрирование в функциональном интеграле проводится вовсе не по гладким траекториям (вопрос из “теории меры”).

[3] Говоря по-другому, в квантовой теории частица движется не по гладким траекториям - в полном соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга. В частности, это является одной из причин проблемы, с которой мы столкнемся ниже при более точном определении меры интегрирования по траекториям.

Результат интегрирования в (2.24) теперь легко формально записать в виде

$$
\begin{aligned}
I(T) &= \mathcal{N}\int\prod_{k=1}^{\infty}dx_k\exp\left(-\frac{\pi^2}{4T}\sum_{k=1}^{\infty}k^2x_k^2\right) = \\
&= \mathcal{N}\prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2\pi}{a_k}}\bigg|_{a_k=\frac{\pi^2k^2}{2T}} = \mathcal{N}\prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{4T}{\pi k^2}}
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

и для интерпретации этого ответа необходимо сначала определить нормировочную константу $\mathcal{N}$.

Константу $\mathcal{N}$ можно зафиксировать, например, потребовав

$$
\int DXe^{-\frac{1}{2}\|X\|^2} = \mathcal{N}\int\prod_{k=1}^{\infty}dx_k\exp\left(-\frac{T}{4}\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\right) = 1
\tag{2.35}
$$

где

$$
\|X\|^2 = \int_0^T dte(t)X(t)^2 = \int_0^1 dt\ TX(t)^2
\tag{2.36}
$$

представляет собой ничто иное как репараметризационно-инвариантную норму, что с очевидностью даёт $\mathcal{N} = \prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{T}{4\pi}}$. Тогда

$$
I(T) = \mathcal{N}\prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{4T}{\pi k^2}} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{T}{\pi k}
\tag{2.37}
$$

Чему равно бесконечное произведение в правой части? После логарифмирования

$$
\log I(T) = \sum_{k=1}^{\infty}\log T - \sum_{k=1}^{\infty}\log(\pi k)
\tag{2.38}
$$

бесконечную константу (пока!) можно "забыть", а коэффициент перед $\log T$

$$
\sum_{k=1}^{\infty}1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}\bigg|_{s=0} = \zeta(0) = -\tfrac{1}{2}
\tag{2.39}
$$

вычислить, например, с помощью аналитического продолжения ζ-функции [4]. Если действовать таким образом, то получаем

$$
I(T) = \int_{X(0)=0}^{X(1)=0} DXe^{-\int_0^1 d\tau\frac{\dot{X}^2}{2T}} = \frac{\text{const}}{\sqrt{T}}
\tag{2.40}
$$

а мультипликативной перенормировкой константу можно считать равной единице.

Очевидные обобщения:

[4] Естественно, что и этот шаг нуждается в обосновании. Заметим сейчас только, что такой ответ получается и при другой естественной регуляризации - после вычисления суммы геометрической прогрессии $\sum_{k>0}e^{-\epsilon k}$ и выкидывания сингулярной части из нее при $\epsilon\to 0$.

- В случае многих переменных $X_\mu = X_\mu(\tau)$, $\mu = 1, \ldots, D$ - для D-мерной релятивистской механики

$$I(T) = \int_{X_\mu(0)=0}^{X_\mu(1)=0} DX e^{-\int_0^1 d\tau \frac{\dot{X}_\mu^2}{2T}} = \frac{1}{T^{D/2}} \tag{2.41}$$

- а для ненулевых граничных условий

$$I(T|X_1, X_0) = \int_{X^\mu(0)=X_0^\mu}^{X^\mu(1)=X_1^\mu} DX e^{-\int_0^1 d\tau \frac{\dot{X}_\mu^2}{2T}} = \frac{e^{-\frac{(X_1^\mu - X_0^\mu)^2}{2T}}}{T^{D/2}} \tag{2.42}$$

Вопрос: удовлетворяет ли ответ уравнению Шредингера - и если да, то почему?

2.6 Результат для пропагатора частицы

Таким образом, после проведенной перенормировки нам осталось проинтегрировать по метрикам De выражение $e^{-\frac{Tm^2}{2}} e^{-\frac{(X_1-X_0)^2}{2T}} / T^{D/2}$, зависящее только от длины $T = \int_0^1 dte(t)$. При этом естественно считать, что

$$\int De \; f(T) = \int \frac{D\xi}{\mathcal{V}} \int_0^\infty dT J(T) f(T) = \int_0^\infty dT J(T) f(T) \tag{2.43}$$

где $\frac{D\xi}{\mathcal{V}}$ отвечает интегралу по группе репараметризаций, нормированный на ее объем, а $J(T)$ - якобиан, возникающих при замене переменных. Вычисление этого якобиана представляет собой отдельную не вполне тривиальную задачу, но предположим пока, что ответ на этот вопрос очень простой, например $J(T) = 1$.

Если действительно окажется так, то для интеграла по траекториям релятивистской частицы с закрепленными концами в пространстве-времени мы окончательно получаем

$$\begin{gathered}\mathcal{K}(X_1, X_0) = \int_{X(0)=X_0, X(1)=X_1} DeDX \; e^{-\int_0^1 dt \left(\frac{\dot{X}^2}{2e} + \frac{1}{2} e m^2\right)} = \\ = \int De \; e^{-\frac{m^2}{2} T} \int_{X(0)=X_0, X(1)=X_1} DX e^{-\int_0^1 dt \frac{\dot{X}^2}{2e}} = \int_0^\infty dT \; \frac{e^{-\frac{(X_1^\mu - X_0^\mu)^2}{2T} - \frac{m^2}{2} T}}{T^{D/2}}\end{gathered} \tag{2.44}$$

что действительно представляет собой представление в виде интеграла по собственному времени для фейнмановского пропагатора, или *причинной* функции Грина уравнения Клейна-Гордона - после аналитического продолжение в пространство Минковского. Интегральное представление удобно для анализа, например, асимптотических свойств:

- Ультрафиолетовое поведение на малых расстояниях, при $|X_1 - X_0| \to 0$, определяется вкладом малых длин T, массой частицы при этом можно пренебречь, и сделав замену переменных легко получить, что $\mathcal{K}(X_1, X_0) \sim \frac{1}{|X_1 - X_0|^{D-2}}$ при $D > 2$.

- Инфракрасное поведение наоборот определяется свойствами интеграла при больших T, тут значение квадрата массы становится определяющим. Для массивных частиц $m^2 > 0$ интеграл подавлен при $|X_1 - X_0| > 1/m$, для безмассовых частиц возникает "дальнодействие", ну а для тахионов с $m^2 < 0$ просто с треском расходится - чего и следовало бы ожидать в случае, если в теории появляются тахионы ... как в бозонной струне.

Однако, многие шаги в приведенном качественном рассмотрении нам осталось еще по-настоящему обосновать.

2.7 Двумерный случай - струна

В теории на двумерном мировом листе мы можем рассмотреть аналогичную задачу. Выберем сначала и для простоты метрику в конформном виде $ds^2 = e^\varphi(d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2) = e^\varphi dz d\bar{z}$ и решим задачу для действия свободной бозонной струны (пока $T = \frac{1}{2\pi\alpha'} = 1$)

$$\begin{gathered} S[X|J] = \tfrac{1}{2}\int_\Sigma d^2z \partial_\alpha X \partial_\alpha X - \int_\Sigma d^2z JX \\ \Delta X(z,\bar{z}) = -J(z,\bar{z}) \end{gathered} \tag{2.45}$$

Это практически полностью повторяет одномерное рассуждение

$$\begin{gathered} S[X|J] = \tfrac{1}{2}\int_\Sigma d^2z \partial_\alpha X \partial_\alpha X - \int_\Sigma d^2z JX = \\ = \tfrac{1}{2}\int_\Sigma d^2z X(-\Delta)X - \int_\Sigma d^2z JX = \tfrac{1}{2}\int_\Sigma d^2z JX = \\ = \tfrac{1}{2}\int d^2z d^2w J(z)G(z,w)J(w) \end{gathered} \tag{2.46}$$

где $X(z) = \int d^2w G(z,w)J(w)$ решение уравнения в (2.45), в котором использована функция Грина (действующего на функциях) двумерного оператора Лапласа $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 = 4\bar{\partial}\partial$

$$\Delta_z G(z,w) = \delta^{(2)}(z-w) \tag{2.47}$$

Тогда, как и в случае частицы, для двухточечного коррелятора получим

$$\langle X(z)X(z')\rangle = G(z,z') \tag{2.48}$$

Какие же существуют решения у уравнения (2.47)?

- Локальное (или на всей комплексной плоскости $\Delta_z G(z,w) = \delta^{(2)}(z-w) - \delta^{(2)}(z-\infty)$)

$$G(z,w) = \frac{1}{2\pi}\log|z-w| \tag{2.49}$$

Физический смысл - потенциал точечного источника, например в нуле при выборе $w = 0$. Такой потенциал очевидно центрально симметричен $G(z,0) = \Phi(|z|)$ и удовлетворяет уравнению $\Delta\Phi(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r) = 0$ при $r \neq 0$, что очевидно дает двумерный потенциал Кулона $\Phi(r) = Q\log r$, а заряд Q определяется из закона Гаусса $\oint dl\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \oint rd\phi\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 2\pi Q = 1$. При этом в уравнение (2.47), если считать его глобально определенном на всей сфере, нужно добавить еще одну δ-функцию в бесконечности, отвечающую за закон сохранения заряда на компактном многообразии и нетривиальной асимптотике $G(z,w) \underset{z\to\infty}{\to} \frac{1}{2\pi}\log|z|$.

- Решение задач Дирихле (и Неймана) в области, например на полуплоскости или в единичном круге (важно для теории открытых струн).

- Решение с периодическими граничными условиями - на цилиндре или на торе.