

1 Вводная лекция

1.1 Теория Струн

- В широком смысле - “основа современной матфизики”: некоторый единый подход к теории элементарных частиц, гравитации и задачам статистической физики.
- В узком смысле - релятивистские струны являются простейшим обобщением релятивистских частиц. Теории на “мировых листах” размерности $p + 1 = 1, 2, 3, \dots$ называются соответственно частицами, струнами, мембранами - в общем случае p -бранами. Нетривиально, что существуют даже браны с $p + 1 = 0$ - инстантоны.
- Наконец, совершенно нетривиально, что *квантовая* теория - непротиворечивая, действующая и тп - *не* существует (не создана пока?) при $p > 1$. Остается пока разобраться с $p = 0, 1$ (хотя гипотетическая возможность создания квантовой теории мембран $p = 2$ до сих пор является одним из вызовов в теоретической физике, инициированным впрочем развитием теории струн).

1.2 Точечная частица

Принцип наименьшего действия - *не следует* ниоткуда.

$$S = \int_0^T L(q, \dot{q}; t) dt = S[q, \dot{q}; T], \quad (1.1)$$

- Интегральный функционал от траекторий (достаточно гладких), отображений отрезка $p = 0$ в многообразии $q : [0, T] \mapsto M \simeq \mathbb{R}^D$;
- Зависит только от (обобщенных) координат и скоростей, достаточно гладкие отображения (что реально в квантовом мире?);
- “Большие системы”, $S \gg \hbar$ - траектории $\delta S = 0$.

Уравнения движения $\delta S = \int \delta L dt$, где

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \quad (1.2)$$

Граничный член: положим $\delta q|_{0,T} = 0$, тогда на экстремали $\delta S = 0$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, \dim M \quad (1.3)$$

уравнения Эйлера-Лагранжа.

Почему все это естественно? Свободное движение (принцип относительности)¹

$$L_{\text{free}}(q, \dot{q}; t) = L_{\text{free}}(\dot{q}) = L_{\text{free}}(\dot{q}^2) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \quad (1.4)$$

А что еще? Вообще говоря:

$$L(q, \dot{q}) = -U(q) + A_i(q) \dot{q}_i + \frac{1}{2} g_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + \dots \quad (1.5)$$

просто разложение по степеням производных.

- Члены выше квадратичных писать "не нужно" (!) - несущественны при медленных изменениях;
- $U(q)$ - скалярный потенциал взаимодействия, $A_i(q)$ - вектор-потенциал (электро)магнитного поля, $g_{ij}(q)$ - метрика (движение на "кривом" многообразии).

Уравнения Эйлера-Лагранжа

$$m \ddot{q}_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} - F_{ij} \dot{q}_j = f_i(q, \dot{q}; t), \quad (1.6)$$

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

приводят ко второму закону Ньютона (для потенциальных сил и силы Лоренца).

¹Наименьшее действие $S \sim \langle V^2 \rangle \geq \langle V \rangle^2$.

- Закон Ньютона - утверждение, что классическая механика описывается дифференциальными уравнениями 2-го порядка: состояние системы определяется её координатами и скоростями (импульсами), взаимодействие зависит от них же. Дифференциальное уравнение вычисляет ускорения по координатам и скоростям и задает (однозначно!) состояния системы в последующие моменты времени.
- Вид естественных в природе взаимодействий почти однозначно определяется простыми свойствами действия - больше практически ничего нельзя написать! Более сложные явления - явная зависимость от времени и т.п. - более характерны для “неэлементарных” систем.

1.3 Релятивистская частица

Обозначения: $s^2 = -(x_1 - x_0)^\mu (x_1 - x_0)_\mu$, $\{x^\mu\} = (ct, \mathbf{x})$, $x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$; $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ (этот выбор возможно будет меняться на протяжении курса!). Действие свободной частицы - релятивистский инвариант

$$S[X] = \kappa \int ds = \kappa \int \sqrt{-dX^\mu dX_\mu} = \kappa c \int dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{X}}^2} \quad (1.7)$$

Забудем про время (евклидово пространство!) - длина дуги в пространстве: $dl = \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \right| d\tau$, $L = \int dl = \int d\tau \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \right)^2}$. Дальше - добавили время и изменили знак под корнем, так как для времениподобного интервала $dx^\mu dx_\mu < 0$ (по повторяющимся индексам подразумеваем суммирование!). В нерелятивистском пределе

$$\begin{aligned} S[X] &\xrightarrow{c \rightarrow \infty} \kappa c \int dt \left(1 - \frac{1}{2c^2} \dot{\mathbf{X}}^2 + \dots \right) \stackrel{?}{=} \\ &\stackrel{?}{=} \text{const} + \int dt \frac{m}{2} \dot{\mathbf{X}}^2 + O(1/c) \end{aligned} \quad (1.8)$$

т.е. $\kappa = -mc$. А релятивистское свободное действие - не квадратично?

Введем произвольный параметр на траектории:

$$S[X] = -mc \int \sqrt{-dX^\mu dX_\mu} = -mc \int d\tau \sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu} \quad (1.9)$$

где теперь $\dot{X}^\mu \equiv \frac{dX^\mu}{d\tau}$, а τ - вовсе не обязательно t . Уравнения движения

$$\begin{aligned} \delta S[X] &= mc \int d\tau \frac{\dot{X}_\mu \delta \dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}} = \\ &= mc \frac{\dot{X}_\mu \delta X^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}} \Big| - \int d\tau \delta X^\mu \frac{d}{d\tau} \frac{mc \dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}} \end{aligned} \quad (1.10)$$

т.е.

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0, \quad p_\mu = \frac{\partial S}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{mc \dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}} \quad (1.11)$$

Действие (1.9) вообще от выбора τ не зависит, т.е. инвариантно относительно любых замен

$$\tau \rightarrow \tau' = f(\tau), \quad f(\tau_0) = \tau_0, \quad f(\tau_1) = \tau_1 \quad (1.12)$$

“длина” не зависит от выбора параметризации кривой ².

Это действие легко переписать в квадратичном виде

$$S[X] \rightarrow S[X, e] = \frac{1}{2} \int d\tau \frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e(\tau)} - \frac{1}{2} m^2 c^2 \int e(\tau) d\tau \quad (1.14)$$

не теряя инвариантности, если $ds = e(\tau) d\tau = e(\tau') d\tau'$. Действительно

$$\frac{\delta S}{\delta e} = -\frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e^2} - m^2 c^2 = 0 \quad (1.15)$$

дает $e = \frac{1}{mc} \sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}$, и после подстановки назад в действие

$$\begin{aligned} S[X, e] &\rightarrow \frac{1}{2} \int d\tau \frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e(\tau)} - \frac{1}{2} m^2 c^2 \int e(\tau) d\tau = \\ &= -mc \int d\tau \sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu} \end{aligned} \quad (1.16)$$

²Как записать эту симметрию локально? Этот простой ответ

$$\delta X^\mu = \xi \dot{X}^\mu, \quad \delta e = \frac{d}{d\tau}(\xi e) \quad (1.13)$$

с локальным параметром $\xi = \xi(\tau) = \tau - f(\tau)$, а одномерная метрика $e(\tau) d\tau$ введена чуть ниже, требуется получить самостоятельно.

получаем старый результат. Но: действие (1.14) - квадратично по X -м и не содержит производных от $e(\tau)$, т.е. у $e(\tau)$ “нет динамики”, и пользуясь репараметризационной инвариантностью его можно выбрать в любом виде, например $e(\tau) = \text{const}$, “одномерная геометрия” - почти тривиальна. Динамика (по вспомогательному параметру τ , который вынужден играть роль времени) переменных $\{X^\mu(\tau)\}$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\dot{X}^\mu}{e} = 0 \quad (1.17)$$

при этом линейна. Кроме того, для $S[X, e]$ существует нетривиальный предел $m \rightarrow 0$ - безмассовая частица, движущаяся со скоростью света.

1.4 Частица во внешних полях

Взаимодействие общего вида ($c = 1$)

$$\begin{aligned} \delta S &= \int ds \Phi(X^\mu, dX^\mu/ds) = \int d\tau e(\tau) \Phi(X^\mu, \dot{X}^\mu/e(\tau)) = \\ &= \int d\tau e \Phi(X^\mu) + \int A_\mu(X) dX^\mu + \frac{1}{2} \int d\tau e^{-1} G_{\mu\nu}(X) \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu + \dots \end{aligned} \quad (1.18)$$

включает скалярное, векторное и гравитационное поле (которое, отметим сразу, просто перенормирует кинетический член для частицы в плоском пространстве). Например,

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S_0 + \int A_\mu(X) dX^\mu = S_0 + \int A_\mu(X) \dot{X}^\mu d\tau = \\ &\stackrel{\tau=t}{=} S_0 + \int dt \left(\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) \dot{\mathbf{X}} - \varphi(\mathbf{X}, t) \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

естественный линейный по производным член. Электромагнитное взаимодействие с векторным и скалярным потенциалами. Сила взаимодействия

$$\begin{aligned} \delta \int A_\mu(X) \dot{X}^\mu d\tau &= \int \left(\partial_\nu A_\mu \delta X^\nu \dot{X}^\mu + A_\mu \delta \dot{X}^\mu \right) \simeq \\ &\simeq \int (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) \delta X^\nu \dot{X}^\mu \end{aligned} \quad (1.20)$$

т.е. $\frac{dp_\mu}{d\tau} = f_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} \dot{X}^\nu$, где $p_\mu = \frac{\delta S_0}{\delta \dot{X}^\mu}$, а

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

при стандартных выражениях $\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$.

Наконец, полезным в дальнейшем окажется следующая манипуляция. Продолжение $\tau \rightarrow -i\tau_E$, $\eta_{\mu\nu} \rightarrow \delta_{\mu\nu}$, $iS \rightarrow -S$. Тогда возникает *евклидово действие*

$$S[X] = \frac{1}{2} \int d\tau \frac{\dot{X}_\mu \dot{X}^\mu}{e(\tau)} + \frac{1}{2} m^2 \int e(\tau) d\tau \quad (1.22)$$

где все положительно и верхние индексы не отличаются от нижних.

1.5 Струна Полякова

Аналогично частице можно написать (сразу работаем в евклидовой версии!):

$$S[X, g] = \frac{1}{2} T \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \quad (1.23)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \quad \mu, \nu = 1, \dots, D$$

где $ds^2 = g_{\alpha\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta$ - "внутренняя метрика" на поверхности Σ , вообще говоря не связанная с индуцированной (прямой аналог собственной длины $e(\tau)d\tau$ на траектории), $g = \det_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}$. Уравнения движения:

$$\frac{\delta}{\delta X_\mu} S[X, g] = \partial_\alpha \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu = 0 \quad (1.24)$$

- уравнения Лапласа (в пространстве Минковского - с неправильным знаком, при $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ просто волновое уравнение $\partial_\tau^2 X^\mu - \partial_\sigma^2 X^\mu = 0$, $X^\mu(\tau, \sigma) = f^\mu(\tau - \sigma) + g^\mu(\tau + \sigma)$); а

$$\frac{1}{T\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}} S[X, g] = \frac{1}{2} \left(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\alpha'\beta'} \partial_{\alpha'} X^\mu \partial_{\beta'} X_\mu \right) \equiv t_{\alpha\beta} \quad (1.25)$$

и если тензор энергии-импульса $t_{\alpha\beta} = 0$, то очевидное решение $g_{\alpha\beta} \sim \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$. Подставляя это решение (индуцированную метрику) в действие $S[X, g]$ получим (появившееся исторически изначально) действие Намбу (получить самостоятельно!).

- $g_{\alpha\beta} = \rho(\sigma, \tau)\eta_{\alpha\beta}$ - квадратичная теория при произвольном $\rho(\sigma, \tau)$ - свойство 2-х измерений

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} T \int d\tau d\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu = \\ &= -\frac{1}{2} T \int d\tau d\sigma (\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu - \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu) \end{aligned} \quad (1.26)$$

- Теория релятивистской струны - аналог точечной частицы, вместо траекторий - цилиндры, $0 \leq \sigma \leq 2\pi$, $X^\mu(\sigma, \tau) = \sum_n e^{in\sigma} X_n^\mu(\tau)$ - бесконечный набор релятивистских частиц. (Каковы массы и спины этих частиц?)
- Естественное взаимодействие

$$\begin{aligned} S \rightarrow S_0 + \frac{1}{2} T \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X) + \int_{\partial\Sigma} A_\mu dX^\mu + \\ + T \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} \Phi_{cl}(X) + T \int_{\partial\Sigma} dl \Phi_{op}(X) + \\ + \frac{1}{2} T \int_\Sigma d^2\sigma \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu}(X) + T \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} R^{(2)} \phi(X) \end{aligned} \quad (1.27)$$

по-прежнему с электромагнитным полем (на границе) и с метрикой пространства-времени $G_{\mu\nu}(X)$ на мировом листе - гравитация! Естественное объединение векторных полей и метрики.

- То, что $\rho(\sigma, \tau)$ пропадает из свободного действия связано со свойством $g^{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} = 0$ - двумерная конформная теория поля.

1.6 Симметрии действия Полякова

Основной базовой симметрией теории струн является репараметризационная инвариантность. В ее основе лежит независимость наблюдаемых

физических явлений от выбора параметризации на мировом листе, характерные размеры которого порядка длины Планка $\sqrt{\alpha'} \sim 10^{-33}$ см, $T = 1/2\pi\alpha'$. В действии для струны Полякова эта инвариантность очевидна - как для любой теории поля во внешней метрике - относительно, например, локальных преобразований $\delta\sigma^\alpha = \xi^\alpha(\sigma)$:

$$\delta X^\mu = \xi^\alpha \nabla_\alpha X^\mu = \xi^\alpha \partial_\alpha X^\mu, \quad \delta g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha \quad (1.28)$$

где ∇ - связность, согласованная с двумерной метрикой $\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$. Заметим также, что *все* слагаемые, отвечающие взаимодействию струны с внешними полями, также обладают свойством репараметризационной инвариантности. Эта базовая симметрия обязана оставаться симметрией и квантовой теории.

В отличие от теории релятивистской частицы действие струны Полякова обладает еще одной дополнительной симметрией - относительно вейлевского преобразования метрики

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow \Lambda(\sigma, \tau) g_{\alpha\beta}, \quad \delta X^\mu = 0 \quad (1.29)$$

которая является естественной именно в двумерной теории. Эта симметрия является в каком-то смысле избыточной для классической теории: с помощью двух независимых репараметризаций можно всегда “убить” две из трех независимых компонент двумерной метрики, и привести ее, например к конформному виду $g_{\alpha\beta} = \rho(\sigma, \tau) \delta_{\alpha\beta}$, после чего конформный фактор $\rho(\sigma, \tau)$ пропадает из действия (и оно естественно инвариантно относительно $\rho \rightarrow \Lambda(\sigma, \tau)\rho$). Однако, если потребовать сохранения репараметризационной инвариантности при квантовании, например вводя ковариантное обрезание $ds^2 = g_{\alpha\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta > \epsilon$, то это условие не является вейль-инвариантным, и в квантовой теории вейлевская мода оживает.

Наконец, в действии в конформной калибровке

$$S[X]|_{g_{\alpha\beta}=\rho(\sigma,\tau)\delta_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} T \int_\Sigma d^2\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu \sim \int_\Sigma d^2\sigma \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu \quad (1.30)$$

остается остаточная симметрия относительно голоморфных замен координат

$$\begin{aligned} z = e^{\tau+i\sigma} &\rightarrow f(z), & \bar{z} = e^{\tau-i\sigma} &\rightarrow \bar{f}(\bar{z}) \\ \rho &\rightarrow \rho |f'(z)|^2 \end{aligned} \quad (1.31)$$

Это бесконечномерная группа конформной симметрии в двумерии (сохраняющая углы) является важнейшей в теории струн, которая поэтому часто формулируется на языке двумерной конформной квантовой теории поля.

1.7 Теория струн и квантовая теория поля

- Одни и те же задачи - формулировка фундаментальных законов микромира;
- Двойственные физические подходы, основанные на первичном (струны) и вторичном (КТП) квантовании;
- Общий базовый аппарат - гауссовы континуальные интегралы в теории свободного поля (двумерие - струны, 4-мерие КТП);
- Рекомендуется изучать последовательно или параллельно.