1 Вводная лекция

2 Квантование: частицы и струны

3 Двумерные теории бозонов и фермионов

4 Операторный формализм для скалярного поля

4.1 Гармонический осциллятор

Начнем с операторного формализма в случае гармонического осциллятора (для простоты все константы, в том числе, частота осциллятора, положены единичными):

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dq^2} + \frac{\omega^2}{2}q^2 = \omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{4.1}$$

где операторы уничтожения $\hat{a} = -\frac{i}{\sqrt{2\omega}}\left(\frac{d}{dq} + \omega q\right)$ и рождения $\hat{a}^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2\omega}}\left(-\frac{d}{dq} + q\right)$ удовлетворяют соотношению Гейзенберга-Фока $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

Пространство состояний нашей системы - модуль Фока - устроено стандартным образом: волновая функция основного состояния $\hat{a}|\psi_0\rangle = 0$ в координатном представлении $\psi_0(q) = e^{-\frac{\omega q^2}{2}}$, а волновые функции всех остальных состояний $|\psi_n\rangle \simeq (\hat{a}^\dagger)^n|\psi_0\rangle$ строятся последовательным действием оператора рождения. Уровни энергии $\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ гармонического осциллятора $E_n = \omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $n \geq 0$. Это важный пример, потому что *все* невзаимодействующие (или с квадратичными лагранжианами) квантовые теории поля сводятся к сумме осцилляторов и их фермионных версий.

4.2 Хронологическое упорядочение

Предположим, что нас теперь интересует не амплитуда перехода из одного состояния в другое, а, например, среднее от некоторых операторов, например значений координат $\hat{q}(t)$ в какие-то заданные моменты времени, при бесконечном времени эволюции ($t_i \to -\infty$, $t_f \to +\infty$)

$$\langle q(t_1)q(t_2)\rangle = \frac{\langle 0|\hat{K}(\infty - t_1)\hat{q}\hat{K}(t_1 - t_2)\hat{q}\hat{K}(t_2 - (-\infty))|0\rangle}{\langle 0|\hat{K}(\infty - (-\infty))|0\rangle} \tag{4.2}$$

где $\hat{K}(t) = e^{-i\hat{H}t}$ - оператор эволюции. Если теперь ввести операторы в картине Гейзенберга

$$\hat{q}(t) = \hat{K}(-t)\hat{q}\hat{K}(t) \tag{4.3}$$

то наше выражение можно записать как

$$\langle q(t_1)q(t_2)\rangle = \langle 0|\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)|0\rangle, \ \ t_1 > t_2 \tag{4.4}$$

При этом важно, что $t_1 > t_2$, в противоположном случае нужно было бы $\hat{q}(t_i)$ расставить в другом порядке. Т.е., мы приходим к формуле

$$\langle q(t_1)q(t_2)\rangle = \langle 0|T\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2)|0\rangle \tag{4.5}$$

связывающей корреляторы, вычисленные двумя способами. Здесь по определению

$$T\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2) = \begin{cases} t_1 > t_2 : & \hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2) \\ t_1 < t_2 : & \hat{q}(t_2)\hat{q}(t_1) \end{cases} \tag{4.6}$$

Посмотрим теперь, как будут выглядеть типичные выражения для операторов в теории гармонического осциллятора. Поскольку $\hat{q} = \frac{i}{\sqrt{2\omega}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$, значит

$$\hat{q}(t) = \frac{i}{\sqrt{2\omega}}\left(e^{-i\omega t}\hat{a} - e^{i\omega t}\hat{a}^\dagger\right) \tag{4.7}$$

Обратим внимание и на то, что множители перед операторами решают уравнения движения классической теории $(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2)q(t) = 0$, следующие из гамильтоновых уравнений для классического предела гамильтониана (4.1).

4.3 Гамильтониан и пространство состояний в теории свободного скалярного поля

Теперь можно перейти к теории безмассовых бозонов на цилиндре с квадратичным действием

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_0^L dx \int_{-\infty}^{\infty} dt \left((\partial_t\phi(x,t))^2 + (\partial_x\phi(x,t))^2\right) \tag{4.8}$$

При этом возникают очевидные коммутационные соотношения $[\frac{\delta}{\delta\phi(x)}, \phi(y)] = \delta(x-y)$, а непрерывный гамильтониан оказывается равен

$$\hat{H} = \int_0^L \left(-\frac{\pi\alpha'}{2}\frac{\delta^2}{\delta\phi(x)^2} + \frac{1}{2\pi\alpha'}(\partial_x\phi(x))^2\right)dx \tag{4.9}$$

и может быть представлен, как мы увидим, в виде гамильтониана бесконечной системы гармонических осцилляторов.

Теперь нашей задачей будет расправиться с гамильтонианом (4.9) так же, как мы расправились с осциллятором. Здесь для этого полезно сделать преобразование Фурье:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_n \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) \phi_n, \qquad \frac{\delta}{\delta\phi(x)} = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_n \exp\left(\frac{-2\pi i n x}{L}\right) \frac{\partial}{\partial\phi_n} \tag{4.10}$$

Такой выбор коэффициентов связан с тем, что

$$\sum_n \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) = L\delta(x), \qquad \int_0^L dx \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) = L\delta_{n,0} \tag{4.11}$$

Подставив эти разложения в гамильтониан (4.9) получим

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_n \left(-\frac{\pi\alpha'}{2} \frac{\partial^2}{\partial\phi_n \partial\phi_{-n}} + \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{4\pi^2 n^2}{L^2} \phi_n \phi_{-n}\right) = \\ &= \pi\alpha' \sum_{n>0} \left(-\frac{\partial^2}{\partial\phi_n \partial\phi_{-n}} + \left(\frac{2n}{\alpha' L}\right)^2 \phi_n \phi_{-n}\right) - \frac{\pi\alpha'}{2} \frac{\partial^2}{\partial\phi_0^2} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Пользуясь опытом с гармоническим осциллятором, подберем и здесь подходящие операторы рождения и уничтожения

$$\hat{a}_n = -i\sqrt{\frac{\alpha' L}{4}} \left(\frac{\partial}{\partial\phi_n} + \frac{2n}{\alpha' L}\phi_{-n}\right), \qquad \hat{\bar{a}}_n = -i\sqrt{\frac{\alpha' L}{4}} \left(\frac{\partial}{\partial\phi_{-n}} + \frac{2n}{\alpha' L}\phi_n\right) \tag{4.13}$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{gathered} \left[\hat{a}_k, \hat{\bar{a}}_m\right] = 0 \\ \left[\hat{a}_k, \hat{a}_m\right] = k\delta_{k+m,0}, \qquad \left[\hat{\bar{a}}_k, \hat{\bar{a}}_m\right] = k\delta_{k+m,0} \end{gathered} \tag{4.14}$$

т.е. почти как в случае осциллятора, если определить $\hat{a}_n^\dagger = \hat{a}_{-n}$, и так же для операторов с чертой (здесь черта не соответствует комплексному сопряжению). Эти операторы отвечают рождению и уничтожению гармоник волн, бегущих влево и вправо.

Используя соотношения

$$\hat{a}_{-n}\hat{a}_n = \frac{\alpha' L}{4} \left(-\frac{\partial^2}{\partial\phi_{-n}\partial\phi_n} + \left(\frac{2n}{\alpha' L}\right)^2 \phi_{-n}\phi_n + \frac{2n}{\alpha' L}\phi_n \frac{\partial}{\partial\phi_n} - \frac{2n}{\alpha' L}\frac{\partial}{\partial\phi_{-n}}\phi_{-n}\right) \tag{4.15}$$

и

$$\hat{\bar{a}}_{-n}\hat{\bar{a}}_n = \frac{\alpha' L}{4} \left(-\frac{\partial^2}{\partial\phi_{-n}\partial\phi_n} + \left(\frac{2n}{\alpha' L}\right)^2 \phi_{-n}\phi_n - \frac{2n}{\alpha' L}\frac{\partial}{\partial\phi_n}\phi_n + \frac{2n}{\alpha' L}\phi_{-n} \frac{\partial}{\partial\phi_{-n}}\right) \tag{4.16}$$

запишем гамильтониан в виде

$$\hat{H} = \frac{2\pi}{L}\sum_{n>0}\left(\hat{a}_{-n}\hat{a}_n + \hat{\bar{a}}_{-n}\hat{\bar{a}}_n + 1\right) + \frac{2\pi}{L}\hat{a}_0^2 \tag{4.17}$$

Помимо нулевой моды $\hat{a}_0 \sim \frac{\partial}{\partial\phi_0}$, которая коммутирует со всеми другими осцилляторными операторами, удобно ввести нулевые "генераторы Вирасоро"

$$\hat{L}_0 = \frac{1}{2}\hat{a}_0^2 + \sum_{n>0}\hat{a}_{-n}\hat{a}_n, \qquad \hat{\bar{L}}_0 = \frac{1}{2}\hat{\bar{a}}_0^2 + \sum_{n>0}\hat{\bar{a}}_{-n}\hat{\bar{a}}_n \tag{4.18}$$

которые отвечают отдельно левым и правым модам и, очевидно, коммутируют между собой.

Как и раньше, потребуем, чтобы волновая функция основного состояния убивалась операторами уничтожения (заодно и поймём, кто из них - уничтожения). Если решением уравнений $\hat{a}_{n>0}\Psi[\phi] = 0$, $\hat{\bar{a}}_{n>0}\Psi[\phi] = 0$, $\hat{a}_0\Psi[\phi] = 0$ будет нормированная волновая функция, значит мы угадали. Результат

$$\Psi[\phi] = \exp\left(-\sum_{n>0}\frac{2n}{\alpha' L}\phi_{-n}\phi_n\right) = \exp\left(-\frac{2}{\alpha' L}\sum_{n>0} n|\phi_n|^2\right) \tag{4.19}$$

хорошо убывает на бесконечности, значит всё правильно. Эта волновая функция является функцией от бесконечного количества фурье-компонент поля в заданный момент времени. Так и должно быть: мы ведь уже поняли, что теперь волновые функции будут не функциями, а функционалами.

Таким образом операторами рождения будут $\hat{a}_{-n}$ и $\hat{\bar{a}}_{-n}$ при $n > 0$. Вычислим, на сколько изменяет энергию (точнее, собственное значение $\hat{L}_0$) применение $\hat{a}_{-n}$. Пусть $\hat{L}_0|\Delta\rangle >= \Delta|\Delta\rangle$, тогда

$$\hat{L}_0(\hat{a}_{-n}|\Delta\rangle) = [\hat{L}_0, \hat{a}_{-n}]|\Delta\rangle + \hat{a}_{-n}\hat{L}_0|\Delta\rangle = [\hat{a}_{-n}\hat{a}_n, \hat{a}_{-n}]|\Delta\rangle + \hat{a}_{-n}\hat{L}_0|\Delta\rangle = (\Delta + n)\,\hat{a}_{-n}|\Delta\rangle \tag{4.20}$$

т.е. действие $\hat{a}_{-n}$ увеличивает энергию на n единиц [1].

Кроме всего прочего, нужно помнить о зависимости от нулевой моды ϕ_0, которая входит в гамильтониан как свободная частица, как квадрат второй производной. Это означает, что каждое состояние будет задаваться ещё и импульсом по этой координате (в теории струн это будет импульс центра масс струны), т.е.

$$|\emptyset;\emptyset;p\rangle = \exp\left(-\frac{2}{\alpha' L}\sum_{n>0} n|\phi_n|^2 + i\sqrt{\frac{4}{\alpha' L}}\cdot p\phi_0\right) \tag{4.21}$$

[1] Другими словами можно сказать, что свободное скалярное поле эквивалентно системе осцилляторов, нумерующимися натуральными $n > 0$ с частотами $\omega_n = n$.

Произвольное состояние записывается как

$$|n_1, ..., n_k; m_1, ..., m_l; p\rangle = \hat{a}_{-n_1} ... \hat{a}_{-n_k} \hat{\bar{a}}_{-m_1} ... \hat{\bar{a}}_{-m_l} |\emptyset; \emptyset; p\rangle = |Y_{\mathbf{n}}; Y_{\mathbf{m}}; p\rangle \tag{4.22}$$

где операторы $\hat{a}_{-n}$ можно упорядочить: $n_1 > ... > n_k$, $m_1 > ... > m_l$, а значит все состояния с заданной энергией и "импульсом" описываются парой диаграмм Юнга [2].

4.4 Выражение для операторов в картине Гейзенберга

Из определения операторов $\hat{a}$ и $\hat{\bar{a}}$ легко получить, что

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_n &= \frac{-i\sqrt{\alpha' L}}{2n} (\hat{a}_{-n} - \hat{\bar{a}}_n) \\ \hat{\phi}(x) &= -\frac{i\sqrt{\alpha'}}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{\hat{a}_{-n} - \hat{\bar{a}}_n}{n} \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) + \frac{\hat{\phi}_0}{\sqrt{L}} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Сопрягая оператором эволюции $e^{t\hat{H}} \hat{a}_n e^{-t\hat{H}} = e^{-\frac{2\pi n t}{L}} \hat{a}_n$, получим

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(x,t) = -\frac{i\sqrt{\alpha'}}{2} \sum_{n \neq 0} \left(\frac{\hat{a}_{-n}}{n} \exp\left(\frac{2\pi i n (x - it))}{L}\right) + \frac{i\sqrt{\alpha'}}{2} \frac{\hat{\bar{a}}_n}{n} \exp\left(\frac{2\pi i n (x + it))}{L}\right) \right) + \\ + \frac{\hat{\phi}_0}{\sqrt{L}} - \frac{2i\pi\sqrt{\alpha'}}{L} \hat{a}_0 t \end{aligned} \tag{4.24}$$

Введём удобное обозначение $z = \exp\left(\frac{2\pi(t+ix)}{L}\right)$, которое отвечает конформному отображению из цилиндра в сферу без пары точек $z = 0, \infty$, тогда

$$\hat{\phi}(z, \bar{z}) = \frac{i\sqrt{\alpha'}}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{\hat{a}_n}{z^n} + \frac{i\sqrt{\alpha'}}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{\hat{\bar{a}}_n}{\bar{z}^n} - \frac{i\sqrt{\alpha'}}{2} (\hat{a}_0 \log z + \hat{\bar{a}}_0 \log \bar{z}) + \frac{2}{\sqrt{\alpha'}} \hat{X} \tag{4.25}$$

где мы также ввели ввести переменную $\hat{X}$, сопряжённую к $\hat{a}_0$, т.е. $\frac{\phi_0}{\sqrt{L}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha'}} X$.

Это выражение почти раскладывается на голоморфную и антиголоморфную части, что ожидаемо, исходя из известного вида корреляторов. Кроме того, если взять от него производную, получится честный голоморфный оператор тока

$$\hat{J}(z) = i\partial\phi(z, \bar{z}) = \sum_n \frac{\hat{a}_n}{z^{n+1}} \tag{4.26}$$

Наконец, пару слов нужно сказать о хронологическом упорядочении. Поскольку была сделана экспоненциальная замена, то теперь роль "времени" будет играть радиус, а координаты - угол. Соответственно, хронологическое упорядочения $t > t'$ превратится в радиальное $|z| > |z'|$.

[2] В данном случае эти операторы коммутируют между собой, потому их упорядочение тривиально.

4.5 Операторный формализм для свободного скалярного поля

Мы выяснили что:

- Для гармонического осциллятора квантовые операторы удовлетворяют классическим уравнениям движения. Другими словами классические коэффициенты Фурье становятся операторами рождения и уничтожения. Так же можно поступить и с двумерным безмассовым скалярным полем - координатой струны

$$X(z,\bar{z}) = X_0 - i\alpha_0 \log(z\bar{z}) + i\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n}{nz^n} + i\sum_{n\neq 0}\frac{\bar{\alpha}_n}{n\bar{z}^n} \tag{4.27}$$

- В квантовой механике функции Грина полей под знаком континуального интеграла отвечают матричным элементам (например вакуумным) для T-упорядоченного произведения операторов.

- Теорию двумерного свободного безмассового скалярного поля на цилиндре (пространственная окружность на временную прямую) можно проквантовать как систему бесконечного набора гармонических осцилляторов с коммутационными соотношениями

$$[\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{n+m,0}, \qquad [\bar{\alpha}_n, \bar{\alpha}_m] = n\delta_{n+m,0}, \qquad n, m \in \mathbb{Z} \tag{4.28}$$

  и гамильтонианом $H = \sum_{n>0}\alpha_{-n}\alpha_n + \sum_{n>0}\bar{\alpha}_{-n}\bar{\alpha}_n + \mathrm{const}$. С точки зрения теории струн операторы $\frac{\alpha_{\pm n}}{\sqrt{|n|}}$ представляют собой операторы рождения ($n < 0$) и уничтожения ($n > 0$) струнных гармоник, а нулевая мода α_0 - импульс движения центра струны как целого.

- Цилиндр полезно отобразить на плоскость $z = e^{\tau + i\sigma}$ с двумя выколотыми точками. Хронологическое произведение при этом превращается в *радиальное упорядочение*. Гейзенберговы уравнения движения для скалярного поля на цилиндре решаются в виде производящей функции (4.27) так, что соответствующие производные дают голоморфные и антиголоморфные токи

$$i\partial X = J(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\alpha_n}{z^{n+1}}, \qquad i\bar{\partial} X = \bar{J}(\bar{z}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\bar{\alpha}_n}{\bar{z}^{n+1}} \tag{4.29}$$

Хронологическое или радиальное упорядочение является достаточно банальным, и мы его часто никак не будем выделять. Проверим, например, нашу гипотезу [3] для коррелятора

[3] В силу квадратичности гауссовой теории достаточно проверить это свойство для двухточечных корреляторов элементарных полей, так как остальные вычисляются из них по теореме Вика.

двух голоморфных токов $\langle J(z)J(z')\rangle$. В операторном формализме при $|z| > |z'|$ это просто матричный элемент

$$\langle 0|J(z)J(z')|0\rangle = \sum_{n,k} \frac{\langle 0|\alpha_n\alpha_k|0\rangle}{z^{n+1}z'^{k+1}} \tag{4.30}$$

по вакууму

$$\begin{aligned} \alpha_n|0\rangle &= 0, \quad n \geq 0, \\ \langle 0|\alpha_n &= 0, \quad n \leq 0 \end{aligned} \tag{4.31}$$

где, в обозначениях Дирака, бра-вектора являются элементами двойственного модуля по отношению к кет-векторам. Таким образом,

$$\sum_{n,k} \frac{\langle 0|\alpha_n\alpha_k|0\rangle}{z^{n+1}z'^{k+1}} = \sum_{n>0,k<0} \frac{\langle 0|\alpha_n\alpha_k|0\rangle}{z^{n+1}z'^{k+1}} = \sum_{n>0,k<0} \frac{n\delta_{n+k,0}}{z^{n+1}z'^{k+1}} = \frac{1}{zz'}\sum_{n>0} n\left(\frac{z'}{z}\right)^n \tag{4.32}$$

где радиальное упорядочение обеспечивает сходимость при $\left|\frac{z'}{z}\right| < 1$. Сумма при этом тривиально вычисляется

$$\sum_{n>0} nq^n = q\frac{d}{dq}\sum_{n>0} q^n = q\frac{d}{dq}\frac{q}{1-q} = \frac{q}{(1-q)^2} \tag{4.33}$$

и приводит к ответу

$$\langle J(z)J(z')\rangle = \frac{1}{zz'}\frac{z'/z}{(1-z'/z)^2} = \frac{1}{(z-z')^2} \tag{4.34}$$

который очевидным образом совпадает с результатом вычисления континуального интеграла

$$\langle J(z)J(z')\rangle = -\partial_z\partial_{z'}\langle X(z,\bar{z})X(z',\bar{z}')\rangle = \partial_z\partial_{z'}\log|z-z'|^2 = \frac{1}{(z-z')^2} \tag{4.35}$$

где выбрана нормировку, в которой функция Грина двух скалярных полей

$$\langle X(z,\bar{z})X(z',\bar{z}')\rangle = G(z,z') = -\alpha'\log|z-z'| = -\log|z-z'|^2 \tag{4.36}$$

4.6 Операторная алгебра

Посмотрим теперь на хронологическое произведение операторов $J(z)$ в квантовой теории. Из вида коррелятора $\langle 0|J(z)J(z')|0\rangle = \frac{1}{(z-z')^2}$ *очевидно*, что оно сингулярно при $z \to z'$. Попробуем ввести *нормальное произведение* операторных токов

$$: J(z)J(z') := J(z)J(z') - \langle J(z)J(z')\rangle \tag{4.37}$$

которое существует и в пределе совпадающих точек [4]. Разложив нормальное произведение в (4.37) в ряд Тейлора при $z \to z'$, для обычного (хронологического) произведения естественным образом получим ряд Лорана

$$J(z)J(z') \underset{z\to z'}{=} \frac{1}{(z-z')^2} + :J(z')^2: + (z-z') :\partial J(z')J(z'): + \dots \tag{4.38}$$

Это - простейший пример операторного разложения в свободной теории поля, общая гипотеза заключается в том, что аналогичная формула существует "всегда".

В произвольной квантовой теории поля - гипотеза о том, что в пространстве всех "разумных" операторов существует операторное умножение

$$A_i(x)A_j(y) = \sum_k C_{ij}^k(x-y)A_k(y) \tag{4.39}$$

т.е. произведение любых двух операторов в разных точках можно разложить в линейную комбинацию по операторам в одной из них с коэффициентами, вообще говоря сингулярными при $x \to y$. Операторное равенство (4.39) понимается как равенство верное, будучи вставленным в *любую* корреляционную функцию

$$\begin{gathered}\langle A_i(x)A_j(y)A_{k_1}(z_1)\dots A_{k_n}(z_n)\rangle = \sum_k C_{ij}^k(x-y)\langle A_k(y)A_{k_1}(z_1)\dots A_{k_n}(z_n)\rangle \\ \langle A_{k_1}(z_1)\dots A_{k_n}(z_n)\rangle = \frac{\int D\phi e^{-S}A_{k_1}(z_1)\dots A_{k_n}(z_n)}{\int D\phi e^{-S}}\end{gathered} \tag{4.40}$$

а константы $\{C_{ij}^k(x)\}$ могут зависеть от чего угодно кроме, но они универсальны для любой корреляционной функции.

В абстрактной квантовой теории ничего больше сказать нельзя, кроме того, что (4.40) в принципе выражает любые корреляционный функции через структурные константы $\{C_{ij}^k(x)\}$ и средние от операторов $\langle A_k(z)\rangle$. Однако в теории с большой группой симметрии (например - конформной), на этии функции налагаются дополнительные условия, следующие из преобразований симметрии: скажем, в конформной теории поля все двух- и трехточечные функции $\langle A_{k_1}(z_1)\dots A_{k_n}(z_n)\rangle$ при $n = 2, 3$ определяются с помощью симметрии с точностью до константы. Кроме того, для ответов на многие вопросы важно знать лишь сингулярные части функций $\{C_{ij}^k(x)\}$.

В свободной теории операторные разложения можно вычислять с помошью *теоремы Вика*, которая следует из того, что любая многоточечная корреляционная функция фундаментальных полей выражается через произведения парных корреляторов (свойство гауссова интеграла). Вследствие этого операторное разложение любых составных операторов выражается с помощью "спаривания" их элементарных составляющих, т.е. все коэффициенты $\{C_{ij}^k(x)\}$ выражаются через парные корреляторы фундаментальных полей.

[4] Кроме того очевидно, что $\langle :J(z)J(z'):\rangle = 0$.

4.7 Операторное разложение и коммутаторы

Сингулярность в операторном разложении связана с некоммутативностью операторов. Действительно, посмотрим на разложение

$$J(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\alpha_k}{z^{k+1}} \tag{4.41}$$

на плоскости с отмеченной точкой $z = 0$, куда вставлен какой-либо оператор $\Phi(0)$ [5]. Действие на него компонент тока можно определить формулой Коши

$$\alpha_n|\Phi\rangle = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0} dz z^n J(z)|\Phi\rangle = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0} dz z^n J(z)\Phi(0)|0\rangle \tag{4.42}$$

эквивалентной операторному разложению (при $z' = 0$)

$$J(z)\Phi(z') = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-z')^{k+1}}\alpha_k\Phi(z') \tag{4.43}$$

имеющему смысл, вообще говоря, лишь при условии $\alpha_k|\Phi\rangle = 0$ для всех $k < k_0$. Определим теперь действие двух операторов последовательным способом

$$\alpha_n\alpha_m|\Phi\rangle = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0} dz z^n J(z)\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^m J(z')|\Phi\rangle \tag{4.44}$$

где контур C_0 обходит точку $z = 0$ *вне* контура C_0', т.е. оператор α_n действует *после* α_m. Наоборот, для действия в обратном порядке

$$\alpha_m\alpha_n|\Phi\rangle = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^m J(z')\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0} dz z^n J(z)|\Phi\rangle \tag{4.45}$$

контур C_0 следует провести *внутри* контура C_0'. Рассмотрим теперь коммутатор

$$\begin{aligned}[\alpha_n,\alpha_m]\Phi(0) &= -\frac{1}{4\pi^2}\left(\oint_{C_0}\oint_{C_0'} - \oint_{C_0'}\oint_{C_0}\right) dz dz' z^n J(z) z'^m J(z')\Phi(0) = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^m \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz z^n J(z)J(z')\Phi(0)\end{aligned} \tag{4.46}$$

Стянем теперь контур интегрирования $C_{z'}$ к точке $z = z'$ и воспользуемся операторным произведением токов (4.38), тогда

$$\begin{aligned}[\alpha_n,\alpha_m] &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^m \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz z^n J(z)J(z') = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^m \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz z^n \left(\frac{1}{(z-z')^2} + \ldots\right)\end{aligned} \tag{4.47}$$

[5] Другими словами можно говорить о новом состоянии $|\Phi\rangle = \Phi(0)|0\rangle$.

где все несингулярные члены можно выкинуть, так как они не дают вклада в интеграл. Вычисляя контурные интегралы, окончательно получим

$$[\alpha_n, \alpha_m] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0'} dz' z'^m \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{z'}} dz \frac{z^n}{(z-z')^2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_0'} dz' z'^m \, n z'^{n-1} = n\delta_{n+m,0} \tag{4.48}$$

т.е. канонические коммутационные соотношения осцилляторов разложения скалярного поля.

Обратим внимание теперь на оператор

$$T(z) = \tfrac{1}{2} : J(z)^2 := -\tfrac{1}{2} : \partial X(z)^2 : \tag{4.49}$$

голоморфной компоненты тензора энергии-импульса. Рассмотрим его операторное разложение с током $J(z)$. Удобно ввести понятия спаривания

$$\begin{gathered} \underbrace{J(z)J(z')} = \langle J(z)J(z')\rangle = \frac{1}{(z-z')^2} \\ J(z)J(z') =: J(z)J(z') : + \underbrace{J(z)J(z')} \end{gathered} \tag{4.50}$$

тогда

$$\begin{gathered} T(z)J(z') = \tfrac{1}{2} : J(z)^2 : \ J(z') = 2 \cdot \tfrac{1}{2} J(z) \underbrace{J(z)J(z')} + \tfrac{1}{2} : J(z)^2 \ J(z') := \\ = \frac{J(z)}{(z-z')^2} + \tfrac{1}{2} : J(z')^3 : + O(z-z') = \frac{J(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial J(z')}{z-z'} + \ldots \end{gathered} \tag{4.51}$$

где мы опустили все несингулярные при $z \to z'$ вклады.

Вычислим, наконец, в теории скалярного поля, сингулярные члены операторного произведения

$$\begin{gathered} T(z)T(z') = \tfrac{1}{2} : J(z)^2 : \tfrac{1}{2} : J(z')^2 := \\ = \tfrac{1}{2} \underbrace{J(z) \underbrace{J(z)J(z')} J(z')} + : J(z) \underbrace{J(z)J(z')} J(z') : + \frac{1}{4} : J(z)^2 J(z')^2 := \\ = \tfrac{1}{2} \langle J(z)J(z')\rangle^2 + \langle J(z)J(z')\rangle : J(z)J(z') : + \ldots = \\ = \frac{1}{2(z-z')^4} + \frac{: J(z')^2 :}{(z-z')^2} + \frac{: J(z')\partial J(z') :}{z-z'} + \ldots = \\ = \frac{1}{2(z-z')^4} + \frac{2T(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial T(z')}{z-z'} + \ldots \end{gathered} \tag{4.52}$$

т.е. операторное разложение имеет вид

$$T(z)T(z') = \frac{c}{2(z-z')^4} + \frac{2T(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial T(z')}{z-z'} + \ldots \tag{4.53}$$

где для скалярного поля число (центральный заряд алгебры Вирасоро) $c = 1$.

Для коммутационных соотношений алгебры Вирасоро представим

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{L_n}{z^{n+2}} \tag{4.54}$$

и рассмотрим аналогичные токовым действия

$$L_n L_m|\Phi\rangle = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0} dz z^{n+1} T(z) \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^{m+1} T(z')|\Phi\rangle \tag{4.55}$$

где опять же контур C_0 обходит точку $z = 0$ *вне* контура C_0', т.е. оператор L_n действует *после* L_m. Для действия в обратном порядке

$$L_m L_n|\Phi\rangle = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^{m+1} T(z') \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0} dz z^{n+1} T(z)|\Phi\rangle \tag{4.56}$$

контур C_0 следует провести *внутри* контура C_0'. Переходя к коммутатору

$$\begin{aligned}[L_n, L_m]\Phi(0) &= -\frac{1}{4\pi^2}\left(\oint_{C_0}\oint_{C_0'} - \oint_{C_0'}\oint_{C_0}\right) dz dz' z^{n+1} T(z) z'^{m+1} T(z')\Phi(0) = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^{m+1} \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz z^{n+1} T(z) T(z')\Phi(0)\end{aligned} \tag{4.57}$$

и стягивая контур интегрирования $C_{z'}$ к точке $z = z'$ и воспользуемся операторным произведением (4.53). В результате имеем

$$\begin{aligned}[L_n, L_m] &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^{m+1} \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz z^{n+1} T(z) T(z') = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^{m+1} \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz z^{n+1}\left(\frac{c}{2(z-z')^4} + \frac{2T(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial T(z')}{z-z'} + \ldots\right)\end{aligned} \tag{4.58}$$

где все несингулярные члены опять же можно выкинуть, так как они не дают вклада в интеграл. Вычисляя контурные интегралы, окончательно получим

$$\begin{aligned}[L_n, L_m] &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^{m+1} \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{z'}} dz z^{n+1}\left(\frac{c}{2(z-z')^4} + \frac{2T(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial T(z')}{z-z'}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0'} dz' z'^{m+1}\left(\frac{c}{2}\frac{(n+1)n(n-1)}{6} z'^{n-2} + (n+1) z'^n 2T(z') + z'^{n+1}\partial T(z')\right) = \\ &= \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0} + 2(n+1)L_{n+m} - (n+m+2)L_{n+m}\end{aligned} \tag{4.59}$$

что представляет собой коммутационные соотношения *алгебры Вирасоро*

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}, \qquad n, m \in \mathbb{Z} \tag{4.60}$$

Про нее можно сказать, что

- Алгебра Вирасоро является центрально расширенной (если $c \neq 0$) бесконечномерной алгеброй Ли векторных полей на окружности $l_n = -z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}$, $[l_n, l_m] = (n-m)l_{n+m}$, голоморфно продолженных на цилиндр и генерирующих конформные преобразования $\delta_\epsilon z = -\epsilon l_n z = \epsilon z^{n+1}$;

- центральный генератор $[c, L_n] = 0$ принимает значения в числах, зависящие от конкретного представления алгебры;

- в теории свободного скалярного поля

$$T(z) = \tfrac{1}{2} : J(z)^2 := \tfrac{1}{2} \sum_{n,k} \frac{: \alpha_n \alpha_k :}{z^{k+n+2}} \tag{4.61}$$

  генераторы $L_n = \frac{1}{2} \sum_{m+k=n} : \alpha_m \alpha_k :$ действуют в модуле Фока-Гейзенберга. В этом представлении центральный заряд $c = 1$.

Заметим, что вывод коммутационных соотношений (4.59), *не зависит* от представления генераторов алгебры Вирасоро, т.к. не опирается на теорию свободного скалярного поля, а использует лишь операторное разложение (4.53).