1 Вводная лекция

2 Квантование: частицы и струны

3 Двумерные теории бозонов и фермионов

3.1 Напоминание

В прошлый раз наверное обсуждали гауссовы интегралы. Вспомним какие-то ответы

$$I(A,b)=\int_{\mathbb{R}^n} d^n x e^{-\frac{1}{2}\sum A_{ij}x_i x_j+\sum b_i x_i}=e^{\frac{1}{2}\sum b_i (A^{-1})_{ij} b_j}\frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det A}} \tag{3.1}$$

Будем обозначать $\langle P\rangle_X$ нормированный интеграл

$$\langle P\rangle_X=\frac{\int d^n x P e^{-\frac{1}{2}\sum A_{ij}x_i x_j}}{\int d^n x e^{-\frac{1}{2}\sum A_{ij}x_i x_j}}. \tag{3.2}$$

Тогда прошлая формула может быть записана в виде

$$\langle e^{\sum b_i x_i}\rangle_X=e^{\frac{1}{2}\sum b_i (A^{-1})_{ij} b_j} \tag{3.3}$$

Отсюда следует, что

$$\langle x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}\rangle_X=\frac{\partial^k}{\partial b_{i_1}\dots\partial b_{i_k}}e^{\frac{1}{2}\sum b_i (A^{-1})_{ij} b_j}\Bigg|_{b=0} \tag{3.4}$$

Например $\langle x_i\rangle_X=0$, $\langle x_i x_j\rangle_X=(A^{-1})_{ij}$, а большие корреляторы выражаются через двухточечные. Это утверждение называется теоремой Вика.

Приведем еще фермионный аналог. Интеграл по грассмановым переменным (интеграл Березина) $\psi_1,\dots,\psi_n$ определяется по формуле

$$\int P(\psi_1,\dots\psi_n)d^n\psi=P_{1,\dots,n}, \tag{3.5}$$

где $P(\psi_1,\dots\psi_n)=\sum_{i_1<\dots<i_k}P_{i_1,\dots,i_k}\psi_{i_1}\dots\psi_{i_k}$ полином от ψ. Тогда гауссов интеграл равен

$$\int e^{\frac{1}{2}\sum A_{ij}\psi_i\psi_j}d^n\psi=\begin{cases}0, & n \text{ нечетное}\\ Pf(A), & n \text{ четное}\end{cases}, \tag{3.6}$$

где матрица A предполагается кососимметричной, $Pf(A)$ обозначает пфаффиан матрицы A. Важный частный случай когда фермионы можно разбить “сопряженные” группы $\psi_1,\dots,\psi_n,\psi_1^*,\dots\psi_n^*$, тогда пфаффиан сводится к просто детерминанту

$$\int e^{\sum A_{ij}\psi_i\psi *_j}d^n\psi d^n\psi^*=\det A \tag{3.7}$$

Корреляторы тоже удобнее вычислять сразу нормированными

$$\langle P\rangle_\Psi = \frac{\int d^n\psi P e^{\frac{1}{2}\sum A_{ij}\psi_i\psi_j}}{\int d^n x e^{\frac{1}{2}\sum A_{ij}\psi_i\psi_j}}. \tag{3.8}$$

Тогда например для случая (3.7) мы имеем

$$\langle\psi_i\rangle = 0, \quad \langle\psi_i\psi_j^*\rangle = (A^{-1})_{ij}. \tag{3.9}$$

3.2 Корреляционные функции кулоновского газа

Рассмотрим теорию свободного скалярного безмассового поля с действием

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2z\ \partial_\alpha X\partial_\alpha X \tag{3.10}$$

Мы будем использовать иногда вместо параметра α' параметр T (натяжение струны) по формуле $1/4\pi\alpha' = T/2$. нам часто, в зависимости от конкретного случая, будет удобно фиксировать квадрат струнной длины α' какой-нибудь константой.

Мы хотим найти следующую *корреляционную функцию*

$$\langle e^{\int J(z)X(z)d^2z}\rangle. \tag{3.11}$$

Тогда по формуле (3.2) мы имеем

$$\langle e^{\int J(z)X(z)d^2z}\rangle = e^{\frac{1}{2}\int J(z)G(z,w)J(w)\partial^2zd^2w}, \tag{3.12}$$

где $G(z,w)$ — функция Грина, т.е. решение уравнения $\Delta_z G(z,w) = \delta^{(2)}(z-w)$. Тогда интегральный оператор $f(z)\mapsto\int G(z,w)f(w)d^2w$ является обратным к оператору Δ.

Решение уравнения с двумя источниками $\Delta_z G(z,w) = \delta^{(2)}(z-w) - \delta^{(2)}(z-\infty)$ на плоскости

$$G(z,w) = \frac{1}{2\pi}\log|z-w| \tag{3.13}$$

легко обобщается на случай нескольких точечных источников на сфере (компактифицированной плоскости) с зарядами $\{P_j\}$, $j=1,\dots,N$, удовлетворяющими $\sum_j P_j = 0$. Таким образом, если взять

$$J(z) = -i\sum_j P_j\delta^{(2)}(z-z_j) \tag{3.14}$$

то сумма $-i\sum_j P_j \frac{1}{2\pi} log|z-z_j|$ будет равна $\Delta^{-1}J(z)$. Тогда мы можем найти

$$
\begin{aligned}
S[X|J] = -\frac{\alpha'}{2}\int d^2z d^2w J(z)\log|z-w|J(w)\Big|_{J(z)=i\sum_j P_j\delta^{(2)}(z-z_j)} &= \\
= -\frac{\alpha'}{2}\sum_{j,k} P_j\cdot P_k \log|z_j-z_k| &= \\
= -\frac{\alpha'}{2}\sum_j P_j^2\log\epsilon_j - \alpha'\sum_{j<k} P_j\cdot P_k\log|z_j-z_k|&, \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

где ϵ_j"="$|z_i-z_j|$. Таким образом

$$
\frac{\int DX e^{-\frac{T}{2}(X,\Delta X)+(J,X)}}{\int DX e^{-\frac{T}{2}(X,\Delta X)}} = \exp(-S[X_{\rm cl}|P;\{z_j\}]) = \prod_j \epsilon_j^{\alpha' P_j^2/2}\prod_{j<k}|z_j-z_k|^{\alpha' P_j\cdot P_k} \qquad (3.16)
$$

Другими словами мы нашли корреляционную функцию

$$
\langle\prod_j V_{\alpha_j}(z_j)\rangle_X = \frac{\int DX\ e^{-S}\prod_j V_{\alpha_j}(z_j)}{\int DX\ e^{-S}} \qquad (3.17)
$$

для экспоненциальных *вершинных (вертексных) операторов*

$$
V_{\alpha_j}(z_j) = \epsilon_j^{-\alpha_j^2}\exp\left(iP_jX(z_j)\right), \qquad \alpha_j = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}P_j \qquad (3.18)
$$

Несколько замечаний:

- Удобно считать P_j имеющими размерность импульса, а α_j - "обезразмеренными" (кулоновскими) зарядами. Операторы

$$
\exp\left(iPX(z)\right) = \int dx e^{iPx}\delta(x-X(z)) \qquad (3.19)
$$

  являются двойственными по Фурье к операторам фиксирующим координаты струны в физическом пространстве-времени.

- Поскольку "нулевая мода" - константа $X(z,\bar z)=X_0$ выпадает из квадратичного действия (3.10), можно считать, что интеграл по ней в (3.17)

$$
\int dX_0\prod_j\exp\left(iP_jX_0\right) = 2\pi\delta\left(\sum_j P_j\right) \qquad (3.20)
$$

  дает δ-функцию, т.е. закон сохранения полного импульса-заряда.

- Сингулярный размерный множитель в определении (3.18) нужен в частности для того, чтобы левая и правая часть равенства одинаковым образом преобразовывалась при масштабных (и конформных!) преобразованиях *мирового листа* [1]. Действительно, при $z \to \lambda z$, $z_j \to \lambda z_j$ действие инвариантно, если считать, что $X(z) \to X(\lambda z)$, $P_j \to P_j$. Однако,

$$\begin{gathered}\prod_{j<k} |z_j - z_k|^{2\alpha_j \cdot \alpha_k} \to |\lambda|^{2\sum_{j<k} \alpha_j \alpha_k} \prod_{j<k} |z_j - z_k|^{2\alpha_j \cdot \alpha_k} \\ \lambda^{2\sum_{j<k} \alpha_j \alpha_k} \underset{\sum_j \alpha_j = 0}{=} \lambda^{-\sum_j \alpha_j^2}\end{gathered} \tag{3.21}$$

и наличие *размерного* множителя $\epsilon_j^{-\alpha_j^2} \to \lambda^{-\alpha_j^2} \epsilon_j^{-\alpha_j^2}$ (поскольку $\epsilon_j \to \lambda \epsilon_j$) в определении (3.18) восстанавливает равенство (3.17) после масштабного преобразования.

3.3 Перенормировка и аномальная размерность

Таким образом мы обнаружили новое явление: между величинами в классической и квантовой теории может существовать нетривиальная связь. Наивно введенные параметры из классической задачи иногда приходится доопределять *сингулярным* образом, чтобы ответ в квантовой задаче имел разумный физический смысл. В данном случае это множитель $\epsilon_j^{-\alpha_j^2}$ (“контрчлен”) в определении вершинного оператора, который сам по себе плохо определен при снятии регуляризации $\epsilon_j \to 0$, однако только *перенормированная* на произведение таких факторов корреляционная функция имеет конечную величину и разумный физический смысл.

Обсудим теперь масштабную размерность δ, которая у классического скалярного поля $X(z)$ - координаты струны - равна нулю, так как $\tilde{X}(\tilde{z}) = X(z)$. Вообще говоря, в классической теории размерности “операторов” могут быть только целыми (у фермионов - полуцелыми из-за их неоднозначности), если эти размерности определить как

$$\tilde{O}(\tilde{z}) = \lambda^{-\delta} O(z), \qquad \tilde{z} = \lambda z \tag{3.22}$$

для собственных функций оператора растяжения. При этом классические размерности в теории скалярного поля очевидно равны количеству производных

$$\begin{gathered}O_0(z) = f(X(z)), \quad \delta = 0 \\ O_1(z) = \partial X f(X(z)) + \bar{\partial} X g(X(z)), \quad \delta = 1\end{gathered} \tag{3.23}$$

и т.д. для любых функций скалярного поля $X(z)$, не содержащей его производных.

[1] Легко проверить это утверждение, например, для дробно-линейных преобразований Мёбиуса $z \to \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, отвечающих глобально определенным конформным преобразованиям сферы.

От масштабной размерности легко перейти к конформным $(\Delta, \bar{\Delta})$ - относительно масштабных или конформных преобразований на мировом листе, связанными отдельно с растяжениями голоморфных или антиголоморфных координат. При этом масштабная размерность $\delta = \Delta + \bar{\Delta}$, а разность конформных $\Delta - \bar{\Delta}$ часто называется спином. Очевидно, что для объектов с нулевым спином при этом возникает фактор $\delta = 2\Delta$.

Формула (3.17) однако означает, что в квантовой теории экспонента $e^{iPX(z,\bar{z})}$ приобретает *аномальную* размерность $\frac{1}{2}\alpha' P^2 = \alpha^2 = 2\Delta$, т.е. результат для коррелятора соответствующим образом нетривиально преобразуется при масштабных преобразованиях. Это означает, например, что в квантовой теории замкнутых струн независящий от выбора координат оператор $\int_\Sigma d^2z\ e^{iPX(z)}$ может существовать лишь при $P^2 = 4/\alpha'$, или в случае многомерного пространства Минковского

$$-P^2 = -P_\mu P^\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = -\frac{4}{\alpha'} \tag{3.24}$$

только для тахиона - частицы с отрицательным квадратом массы $m^2 = -\frac{4}{\alpha'}$.

3.4 Двухточечные функции

Рассмотрим подробнее простейший случай коррелятора экспоненциальных полей (3.17) - двухточечный, так как одноточка $\langle e^{i\alpha X(z)}\rangle \sim \delta(\alpha)$ равна нулю при $\alpha \neq 0$. В случае двухточки закон сохранения заряда оставляет единственный ненулевой вариант

$$\langle V_\alpha(z) V_{-\alpha}(z')\rangle = \langle e^{i\alpha X(z)} e^{-i\alpha X(z')}\rangle = \frac{1}{|z-z'|^{2\alpha^2}} = \frac{1}{|z-z'|^{4\Delta_\alpha}} \tag{3.25}$$

где $\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2$ - аномальная размерность (как оператора V_α, так и оператора $V_{-\alpha}$). Общий вопрос о спектре допустимых операторов в теории, т.е. множестве $\mathcal{A}$ допустимых значений $\alpha \in \mathcal{A}$ чрезвычайно важный, и не самый простой - мы вернемся к нему позже. В данный момент заметим лишь, что выражение (3.25) допускает голоморфную факторизацию

$$\langle V_\alpha(z) V_{-\alpha}(z')\rangle = \frac{1}{|z-z'|^{4\Delta_\alpha}} = \frac{1}{(z-z')^{2\Delta_\alpha}} \frac{1}{(\bar{z}-\bar{z}')^{2\Delta_\alpha}} \tag{3.26}$$

после которой в случае общего положения каждый из сомножителей перестает вообще говоря быть однозначной функцией (или приобретает нетривиальную монодромию при обходе $z \circlearrowleft z'$). Это не так, однако, при $2\Delta_\alpha = k \in \mathbb{Z}$, т.е. (для убывающих корреляционных функций) для

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} P_k = \sqrt{k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.27}$$

В этом случае можно пытаться придать смысл, например, коррелятору голоморфных частей операторов $J_\pm(z) = V_{\pm\sqrt{2}}(z)$ (размерностей $\Delta = 1$)

$$\langle J_+(z) J_-(z')\rangle = \frac{1}{(z-z')^2} \tag{3.28}$$

который окадывается “очень похожим” на коррелятор двух голоморфных токов - производных скалярного поля $J(z) = i\partial X(z)$

$$\langle J(z)J(z')\rangle = -\alpha'\partial_z\partial_{z'}\log|z-z'| = \frac{\alpha'/2}{(z-z')^2} \underset{\alpha'=2}{=} \frac{1}{(z-z')^2} \tag{3.29}$$

у которых - наоборот - вся размерность $\Delta = 1$ классическая, а аномальная равна нулю.

Наконец, в случае $\alpha = \pm 1$ голоморфные и антиголоморфные части тоже могут быть определены сами по себе, например

$$\langle V_+(z)V_-(z')\rangle = \frac{1}{z-z'} \tag{3.30}$$

и отвечают коррелятору некоторых операторов размерности $\Delta = \frac{1}{2}$ с полюсом первого порядка.

3.5 Корреляторы двумерных фермионов

Действие Вейля для двумерных безмассовых комплексных фермионов имеет вид

$$S = \frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2z(\psi^*\bar\partial\psi + \psi^*\bar\partial\psi) \tag{3.31}$$

где ψ^* и ψ - комплексные фермионы, или различные грассмановы функции (1/2-дифференциалы) на мировом листе, голоморфные на уравнениях движения [2]

$$\bar\partial\psi = 0, \qquad \bar\partial\psi^* = 0. \tag{3.32}$$

Чтобы применить формулы для гауссового интеграла нужно “обратить” оператор $\bar\partial$. Это можно сделать по формуле

$$\bar\partial\frac{1}{z-z'} = \pi\delta^{(2)}(z-z') \tag{3.33}$$

Тогда по формуле 3.9 мы находим двухточечные функции

$$\langle\psi^*(z)\psi(z')\rangle = \frac{1}{z-z'}. \tag{3.34}$$

Что можно сказать про эту систему более подробно:

[2] Для “анти-голоморфной части” действия все утверждения получаются формальным комплексным сопряжением.

- Из инвариантности действия (3.31) следует, что размерности $\Delta_\psi = \Delta_{\psi^*} = \frac{1}{2}$, и это размерности классические. Для конформных размерностей $(\Delta, \bar{\Delta})$ относительно независимых растяжений z и $\bar{z}$, фермионы с $(\Delta, \bar{\Delta}) = (\frac{1}{2}, 0)$ являются $1/2$ - дифференциалами. Действительно, действие (3.31) (как и бозонное действие (3.10)) инвариантно относительно произвольных независимых голоморфных замен координат

$$\tilde{z} = f(z), \qquad \tilde{\bar{z}} = \tilde{f}(\bar{z}), \qquad (z, \bar{z}) \in \mathbb{C}^2 \tag{3.35}$$

при условии, что $\psi(z)dz^{1/2} = \tilde{\psi}(\tilde{z})d\tilde{z}^{1/2}$, $\psi^*(z)dz^{1/2} = \tilde{\psi}^*(\tilde{z})d\tilde{z}^{1/2}$.

- Корреляционная функция (3.34) совпадает с корреляционной функцией (3.30), а именно

$$\langle \psi^*(z)\psi(z')\rangle_\Psi = \langle V_+(z)V_-(z')\rangle_X = \langle e^{iX(z)}e^{-iX(z')}\rangle_X \tag{3.36}$$

при отождествлении фермионов с “голоморфными частями” скалярных полей

$$\psi^*(z) \leftrightarrow e^{iX(z)}, \qquad \psi(z) \leftrightarrow e^{-iX(z)} \tag{3.37}$$

составных операторов в квантовой теории, так что ненулевая классическая размерность фермионов набирается из аномальной размерности, т.е. за счет квантовых эффектов.

- Рассматривая более общие корреляционные функции можно получить одно из простейших, но уже достаточно общих проявлений *бозон-фермионного соответствия* — - связи корреляционных функций конформных теорий бозонов и фермионов в двумерии. Можно попробовать сравнить корреляторы произвольного числа

$$\langle \prod_{i,j} V_+(z_i)V_-(w_j)\rangle_X = \langle \prod_{i,j} e^{iX(z_i)}e^{-iX(w_j)}\rangle_X \overset{?}{=} \langle \prod_{i,j} \psi^\dagger(z_i)\psi(w_j)\rangle_\Psi \tag{3.38}$$

бозонов [3] и фермионов на сфере (а также на торе, или даже римановой поверхности произвольного рода). Вычисление корреляторов в левой и правой части (3.38) на сфере приводит к детерминантной формулы Коши, а на кривых старшего рода — замечательным тождествам Фэя.

3.6 Открытая струна и амплитуда Венециано

Задача о нахождении действия с точечными источниками решается аналогично случаю замкнутой струны, где теперь все точки $\{z_j = \xi_j\}$ можно считать находящимися на границе $\mathrm{Im}\xi_j = 0$ [4], а вместо наивной функции Грина (3.13) следует воспользоваться функцией

[3] Где мы используем факторизацию и говорим только про голоморфную часть корреляционной функции.

[4] Строго говоря, следует решить задачу для точек “близких к границе” и потом совершить предельный переход.

Грина $G_N(z,w)$ задачи Неймана, например - в полуплоскости

$$G_N(z,w) = \frac{1}{2\pi T}\log|z-w||z-\bar{w}| \tag{3.39}$$

удовлетворяющей граничному условию

$$\begin{aligned}&\left(\partial_z G_N(z,w) - \bar\partial_{\bar z} G_N(z,w)\right)\Big|_{\partial\Sigma} = \\ &= \left(\partial_z G_N(z,w) - \bar\partial_{\bar z} G_N(z,w)\right)\Big|_{z=\bar z} = 0\end{aligned} \tag{3.40}$$

Вычисляя квадратичное действие для данной конфигурации открытой струны, очевидно получим

$$\begin{aligned}S[X|P] &= \frac{1}{4\pi T}\int d^2z d^2w J(z) G_N(z,w) J(w)\Bigg|_{J(z)=-i\sum_j P_j\delta^{(2)}(z-\xi_j)} = \\ &= -\frac{1}{2\pi T}\sum_j P_j^2 \log\epsilon_j - \frac{1}{\pi T}\sum_{j<k} P_j\cdot P_k \log|\xi_j-\xi_k|\end{aligned} \tag{3.41}$$

или, используя $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$,

$$\exp(-S[X|P;\{\xi_j\}]) = \prod_j \epsilon_j^{\alpha' P_j^2}\prod_{j<k}|\xi_j-\xi_k|^{2\alpha' P_j\cdot P_k} \tag{3.42}$$

Наконец, попытаемся получить осмысленный результат в квантовой теории струн пользуясь полученным выражением - решением по сути дела классической задачи. Из общих принципов - это отвечает суммированию по всем конфигурациям, которое в главном приближении дается классическим действием:

$$\sum_{\text{paths}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S\right) \sim \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S_{\text{cl}}\right) \tag{3.43}$$

Вычисление модифицированного действия

$$e^{-S[X|P;\{\xi_j\}]} = \langle \exp\left(-\frac{T}{2}\int_\Sigma d^2z\partial_\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu\right)\prod_j \exp\left(iP_j^\mu X_\mu(\xi_j)\right)\rangle_X \tag{3.44}$$

на соответствующей классической конфигурации можно пытаться интерпретировать как взаимодействие некоторых плоских волн-частиц с импульсами $\{P_j\}$ с мировой поверхностью струны - открытой или замкнутой, а значание вычисленного действия - как амплитуду рассеяния. Плохо только, что полученные нами выражения (3.16), (3.44) буквально не годятся - так как *явно* зависят от координат на мировом листе.

Проект наивного ответа - например в теории открытой струны

$$A(\{P_j\}) = \int \prod_j d\xi_j \exp(-S[X|P;\{\xi_j\}]) = \prod_j \epsilon_j^{\alpha' P_j^2} \int_{\mathbb{R}} d\xi_j \prod_{j<k} |\xi_j - \xi_k|^{2\alpha' P_j \cdot P_k} \tag{3.45}$$

Вспомним теперь, что наблюдаемые величины в теории струн не должны зависеть от выбора координат на мировом листе. В частности это означает, что полученный интеграл должен как-то разумно вести себя при дробно-линейных преобразованиях

$$\xi_j \to \frac{a\xi_j + b}{c\xi_j + d}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) \tag{3.46}$$

Очевидно при этом

$$\begin{aligned} d\xi_j &\to \frac{d\xi_j}{(c\xi_j + d)^2}, \qquad \forall j \\ \xi_j - \xi_k &\to \frac{\xi_j - \xi_k}{(c\xi_j + d)(c\xi_k + d)}, \qquad \forall j,k \end{aligned} \tag{3.47}$$

то есть

$$\begin{aligned} \prod_j d\xi_j \prod_{j<k} |\xi_j - \xi_k|^{2\alpha' P_j \cdot P_k} \to \prod_j d\xi_j \prod_{j<k} |\xi_j - \xi_k|^{2\alpha' P_j \cdot P_k} \times \\ \times \prod_j \frac{1}{(c\xi_j + d)^2} \times \prod_j \frac{1}{(c\xi_j + d)^{2\alpha' P_j \sum_{k\neq j} P_k}} \end{aligned} \tag{3.48}$$

или, проще говоря, интегранд в (3.45) домножается на

$$\prod_j \frac{1}{(c\xi_j + d)^{2(1-\alpha' P_j^2)}} \tag{3.49}$$

где мы использовали $\sum_k P_k = P_j + \sum_{k\neq j} P_k = 0$. Таким образом, интегранд оказывается инвариантным относительно дробно-линейных преобразований лишь когда “импульсы” всех внешних концов удовлетворяют условию массовой поверхности

$$\frac{1}{\alpha'} = P^\mu P_\mu = \mathbf{P}^2 - E^2 \tag{3.50}$$

то есть отвечают отрицательным квадратам массы или *тахионам*.

При этом интегральное выражение для амплитуды (3.45) оказывается “трехкратно переопределенным”. С учетом этого вырождения можно написать для N-точечной амплитуды

$$\begin{aligned} A(P_1,\ldots,P_N) \sim \int \prod_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}} d\xi_j \prod_{k=N-2,N-1,N} \delta(\xi_k - \xi_k^{(0)}) \left| \frac{\partial(\xi_{N-2},\xi_{N-1},\xi_N)}{\partial(\alpha,\beta,\gamma)} \right| \times \\ \times \prod_{j<k} |\xi_j - \xi_k|^{2\alpha' P_j \cdot P_k} \end{aligned} \tag{3.51}$$

где
$$\delta\xi_k = \alpha + \beta\xi_k + \gamma\xi_k^2, \qquad k = N-2, N-1, N \tag{3.52}$$
представляют собой инфинитзимальную дробно-линейных форму преобразований, или попросту “забить” на лишние интегрирования в (3.45).

Для $N = 4$ удобно выбрать $\xi_2^{(0)} = 0$, $\xi_3^{(0)} = 1$, $\xi_3^{(0)} = \infty$ и интегрировать по $\xi_1 = \xi$, скажем в пределах $0 < \xi < 1$. Тогда результат будет иметь вид
$$\begin{gathered} A(P_1, \ldots, P_4) \sim \int_0^1 d\xi \xi^{2\alpha' P_1 \cdot P_2}(1-\xi)^{2\alpha' P_2 \cdot P_3} = \\ = \int_0^1 d\xi \xi^{-\alpha' s - 2}(1-\xi)^{-\alpha' t - 2} = B(-\alpha(s), -\alpha(t)) = \\ = \frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))} = A(s,t) \end{gathered} \tag{3.53}$$
где использована линейная функция $\alpha(x) = 1 + \alpha' x$ от переменных Мандельстама
$$\begin{aligned} s &= -(P_1 + P_2)^2 = -\frac{2}{\alpha'} - 2P_1 \cdot P_2 \\ t &= -(P_2 + P_3)^2 = -\frac{2}{\alpha'} - 2P_2 \cdot P_3 \end{aligned} \tag{3.54}$$
при $P^\mu P_\mu = \frac{1}{\alpha'}$. Формула (3.53) называется амплитудой Венециано, и пользуясь свойствами гамма-функции её можно представить в виде
$$\begin{gathered} A(s,t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(t)+1)(\alpha(t)+2)\ldots(\alpha(t)+n)}{n!} \frac{1}{\alpha(s) - n} \sim \\ \sim \sum_{n \geq -1} \frac{C_n}{s - \frac{n}{\alpha'}} (t^{n+1} + \ldots) \end{gathered} \tag{3.55}$$
т.е. суммы по промежуточным резонансам с массами $-(P_1 + P_2)^2 = M^2 = \frac{n}{\alpha'}$, $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$. Это естественно интерпретировать как наличие в спектре (открытой) струны частично-подобных состояний - начиная с тахиона, безмассового, и массивных состояний кратных массе Планка.